CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 13 (Curso 2023–2024)

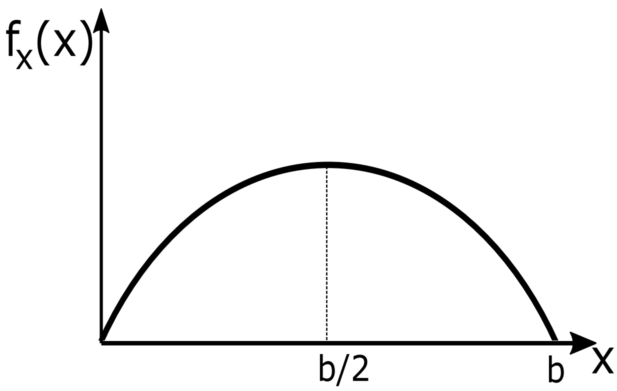
1.– La función

$$f_X(x) = \frac{(a+1)x^a}{\theta^{a+1}}, \quad 0 \leq x \leq \theta, \quad \theta > 0, \quad a > 0$$

es una función de densidad para cualesquiera valores de θ y a con las restricciones especificadas. Dada una muestra aleatoria de tamaño n de X y suponiendo $\theta =$ cte. deducir estimadores puntuales de a mediante todos los métodos que se conozcan.

Repítase el ejercicio suponiendo $a =$ cte. y encontrando estimadores puntuales de θ

2.– Se sabe que la variable aleatoria X tiene la distribución de la figura (parábola).



Se pide:

a) Determinar la función de densidad y la función de distribución acumulada de X.

b) Dada una muestra de tamaño n determinar un estimador de b por el método de los momentos.

c) Estudiar, en lo posible, el sesgo y la consistencia del estimador.

3.– Una compañía especializada en transportes pesados realiza la siguiente oferta a una empresa de construcción de álabes de aerogeneradores que necesita enviar su mercancía a un determinado puerto de mar para embarcarlas. El tiempo de viaje hasta el puerto se pacta en una cifra T_0. Si el camión tarda T_0 el precio acordado es fijo. Ese precio cubre los gastos del transporte, por lo que teóricamente, la empresa de transporte no obtendría ningún beneficio. Llamemos $X = T - T_0$, el tiempo de retraso ($X \geq 0$) o de adelanto ($X < 0$) del camión. Si el camión se retrasa, la empresa de transporte pagaría una multa de $40X^2$. Si por el contrario, el camión se adelanta, la empresa obtendría un pago adicional de $-10X^3$. La empresa sabe que este tiempo X de retraso o adelanto es aleatorio con la siguiente distribución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{-xe^{-(x/t)^2}}{t^2} & x \leq 0 \\ \dfrac{xe^{-(x/t)^2}}{t^2} & x > 0 \end{cases}$$

Por encargos anteriores, la empresa de transporte tiene una muestra de 12 encargos similares, de donde obtuvo la siguiente muestra, considerada aleatoria, de la variable $X:\ 11.3,\ -3.5,\ -4.5,\ -7.2,\ 3.7,\ 3.5,\ -2.3,\ -0.87,\ 2.2,\ 2.5,\ -5.3,\ -4.1$

Se pide:

a) Determinar un estimador del parámetro t mediante el método de máxima verosimilitud.

b) En el caso de que la fábrica aceptase la oferta, ¿es ésta beneficiosa para la empresa de transporte? Justificar la respuesta.

Nota 1: $n = 12,\quad \sum x_i = -4.57,\quad \sum x_i^2 = 300$

Nota 2: $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{t^3\sqrt{\pi}}{4},\quad \int_0^\infty x^3 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{t^4}{2},\quad \int_0^\infty x^4 e^{-(x/t)^2} dx = \frac{3t^5\sqrt{\pi}}{8}$

4.– De una población aleatoria X, con función de densidad

$$f_x(x) = \theta^2 x e^{-x\theta}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

se toma una muestra de tamaño 1, x_1.

Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ. Estudiar su sesgo.

5.– Considérese el porcentaje del tiempo total permitido que utiliza un estudiante para realizar un determinado examen. Sea X este porcentaje aleatorio. Supóngase que este porcentaje se distribuye estadísticamente (en tanto por uno) según la función de densidad

$$f_X(x) = (\theta + 1)x^\theta, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \theta > -1$$

Se toma una muestra de 10 estudiantes con el siguiente resultado:

0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94 y 0.77.

1.- Calcular un estimador de θ por el método de los momentos.

2.- Calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ.
