CPE (SEGUNDO CURSO)

PRÁCTICA 7 (Curso 2023–2024)

1.– Considérense las variables aleatorias independientes X e Y tales que

$$f_X(x) = 1, \quad x \in [0,1], \qquad f_Y(y) = 1/2, \quad y \in [0,2]$$

¿Cuál es la probabilidad de que, en una cierta observación simultánea de X e Y, la más pequeña de las dos sea menor que $1/2$?

2.– Un sistema de detección emplea equipos de vídeo de alta tecnología con el fin de detectar los automóviles que no pagan en una estación automática de peaje de una autopista. Se ha creado un prototipo del sistema, que se está empleando en una estación determinada. El sistema se ha diseñado para detectar a los infractores con una probabilidad del 90 % (es decir, un rendimiento teórico del 90 %).

Sin embargo, se supone que esta probabilidad variará con las condiciones meteorológicas bajo las que actúe el sistema. Por lo tanto, se ha diseñado el prototipo para que registre automáticamente el clima cada vez que detecta un infractor. Tras una serie de pruebas controladas, realizadas bajo diferentes situaciones meteorológicas, se dispone de la siguiente información: en los casos en que el vehículo infractor fue detectado por el sistema, el clima estuvo despejado el 75 % de las veces, nublado el 20 % y lluvioso el 5 %. Cuando el sistema no detectó al infractor, el clima estuvo despejado el 60 % de las veces, nublado el 30 % y lluvioso el 10 %. A la vista de estos datos, ¿cuál es el rendimiento del sistema en las diferentes condiciones meteorológicas? ¿Es muy lluviosa la zona de ensayo?

3.– Calcular el coeficiente de correlación de X e Y si

$$f_{XY}(x,y) = x + y \qquad R_{X,Y} = [0,1] \times [0,1]$$

4.– El sistema de propulsión de un avión comercial consta de cuatro turbinas que funcionan de manera independiente. Se pide calcular la distribución de la vida del sistema en los siguientes casos:

a) El sistema puede funcionar aunque una de las turbinas deje de funcionar.

b) El sistema puede funcionar siempre y cuando no fallen las dos turbinas del mismo lado.

c) Calcular y comparar la esperanza matemática de cada caso.

Supóngase que X, tiempo de vida de una turbina, es una variable exponencialmente distribuida con parámetro $\lambda = 1/E[X]$.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

Nota: recuérdese que $\int_0^\infty t n\lambda e^{-n\lambda t} dt = \frac{1}{n\lambda}$

5.– Un tipo de máquina tiene probabilidad 2/3 de ser operativa durante 100 unidades de tiempo; alcanzado este límite de tiempo, la máquina se desecha y diremos que su duración T es de 100 unidades de tiempo. Si una máquina no alcanza el valor de 100, la probabilidad de que su duración T se halle en el intervalo (t_1, t_2) viene dada por:

$$P[t_1 \leq T \leq t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt \quad con \;\; \alpha(t) = At^2(100-t)^2, \quad 0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 < 100$$

Se pide:

a) Hallar el valor de A y la función de distribución acumulada de T.

b) Hallar la probabilidad de que una máquina no alcance la duración de 100 habiendo superado la duración de 50.