Cálculo de probabilidades y estadística **Examen Primer Parcial**

EJERCICIO 2 (SOLUCIONES) **25 de enero de 2024**

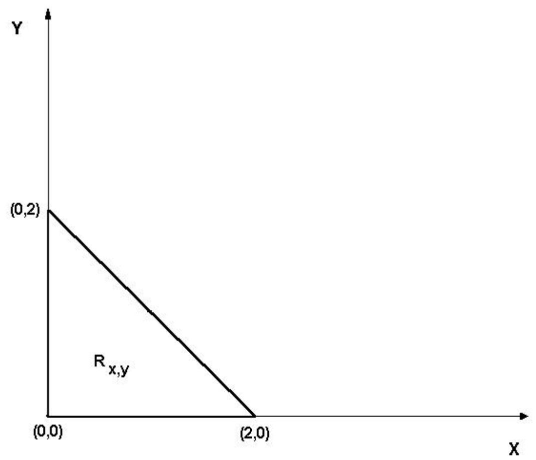
1.– Sea un el rango conjunto de dos variables aleaotrias X e Y el triángulo comprendido entre los vértices (0,0), (0,2) y (2,0). Si la función de densidad es constante, se pide calcular:

a) La función de densidad conjunta y la función de distribución acumulada conjunta de X e Y.

b) Las funciones de densidad marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

c) Determinar la distribución de $Z = X + Y$

————————SOLUCIÓN————————



a)

Dado el rango conjunto, la función de densidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}, \quad x,y \in R_{X,Y}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{x\ y}{2}, \quad x,y \in R_{X,Y}$$

b)

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{y=2-x} \frac{1}{2}dy = \frac{2-x}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{x=2-y} \frac{1}{2}dx = \frac{2-y}{2}$$

Dado el rango conjunto las variables no son independientes. También lo podemos verificar observando que el producto de las distribuciones marginales no es igual a la conjunta.

c)

Sea $Z = X + Y$. Obviamente $R_Z = [0, 2]$. Como siempre, fijemos $Y = y$. Entonces

$$f_{Z|Y}(z, y) = \frac{dx}{dz} f_{X|Y}(x, y) = f_{X|Y}(x, y)$$

$$f_{Z,Y}(z, y) = f_{Z|Y}(z, y) f_Y(y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) = f_{X,Y}(z - y, y)$$

E integrando para hallar la distribución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_Y} f_{X,Y}(z - y, y) dy$$

Para que la función integrando de la integral anterior sea diferente de cero se ha de verificar

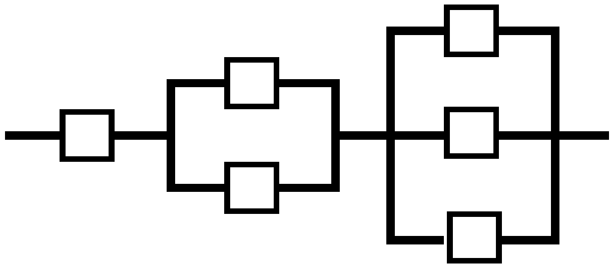
$$\begin{cases} 0 \leq z - y \leq 2; & z - 2 \leq y \leq z \\ 0 \leq y \leq 2; & 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Y como $R_Z = [0, 2]$,

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{X,Y}(z - y, y) dy = \int_0^z \frac{1}{2} dy = \frac{z}{2}, \quad 0 \leq z \leq 2$$

y es inmediato comprobar que cumple las propiedades de una función de densidad.

2.– El sistema de la figura es tal que cada uno de sus componentes tiene una vida aleatoria exponencialmente distribuida con parámetro λ, y es independiente de todos los demás. Calcular la distribución y la esperanza matemática de la vida del sistema.



SOLUCIÓN

Sea X la vida de un componente. Sabemos que $X \equiv EX(\lambda)$. Sea Y_1, Y_2 e Y_3 la vida de los sistemas de un componente, dos componentes y tres componentes, respectivamente. Obviamente $Y_1 = X$. Por otra parte

$$Y_2 = max\{X_a, X_b\}$$

donde a y b son los dos componentes del sistema. Luego

$$F_{Y_2} = [F_X(y)]^2 = [1 - e^{-\lambda y}]^2$$

Igualmente

$$Y_3 = max\{X_a, X_b, X_c\} \quad \Rightarrow \quad F_{Y_3} = [F_X(y)]^3 = [1 - e^{-\lambda y}]^3$$

Si Z es el tiempo de vida del sistema total

$$F_Z(z) = min\{Y_1, Y_2, Y_3\} = 1 - [1 - F_{Y_1}(z)][1 - F_{Y_2}(z)][1 - F_{Y_3}(z)], \quad z \in [0, \infty)$$

Operando resulta

$$F_Z(z) = 1 + [e^{-6\lambda z} - 5e^{-5\lambda z} + 9e^{-4\lambda z} - 6e^{-3\lambda z}], \quad z \in [0, \infty)$$

Derivando,

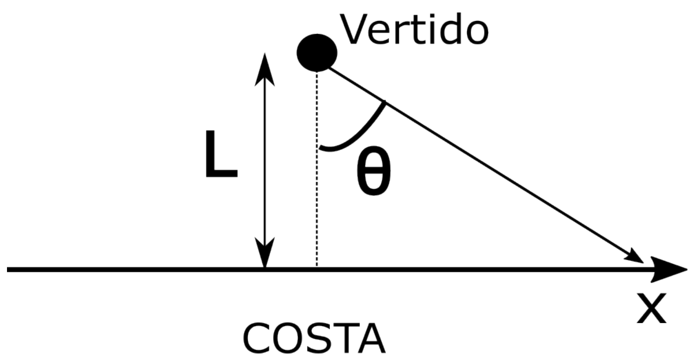
$$f_Z(z) = -6e^{-6\lambda z} + 25e^{-5\lambda z} - 36e^{-4\lambda z} + 18e^{-3\lambda z}, \quad z \in [0, \infty)$$

Multiplicando por z e integrando entre 0 y ∞ resulta, teniendo en cuenta que $\int_0^\infty hxe^{-hx}dx = \frac{1}{h}$

$$E[z] = \frac{7}{12\lambda}$$

3.–

Debido a la caída de unos contenedores, se ha producido un vertido de pellets de plástico. Supongamos que un pellet de plástico en el mar es transportado en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección del viento. Suponemos el viento constante y perpendicular a la costa, la cual es rectilínea y situada a una distancia L del punto de emisión de la partícula.



Se supone que θ es aleatorio y tiene una función de densidad de la forma

$$f_\Theta(\theta) = acos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

Se pide:

a) El valor de la constante a, la distribución acumulada de θ, y su media, mediana y moda.

b) La función de densidad de la coordenada X, del punto de llegada del pellet de plástico a la costa (referida al punto de la costa más cercano al de emisión).

c) La escasez de medios obliga a que sólo se envíen equipos de limpieza a lugares del intervalo $(-x_0, x_0)$ de forma que la probabilidad de llegada de pellets a ese intervalo sea 0.90 . Determinar x_0. Comentar el resultado obtenido.

NOTA Se recuerdan, por si fueran necesarias, las siguientes expresiones:

$$cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}, \qquad sen\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}, \qquad 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$$

SOLUCIÓN

(a) Para que $f_\Theta(\theta)$ sea una función de densidad ha de verificarse,

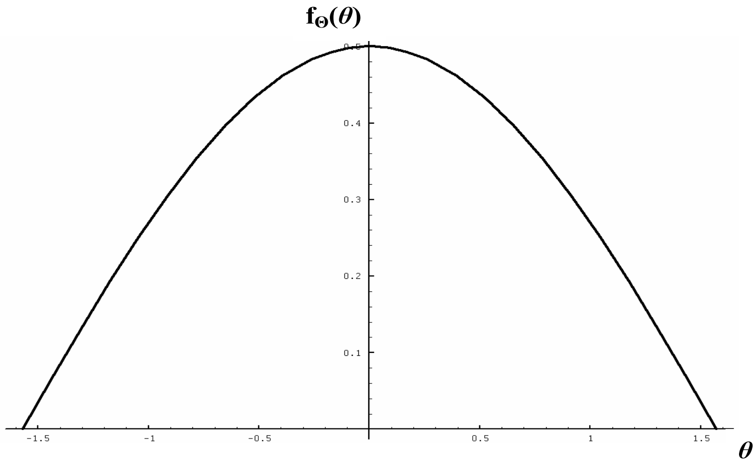
$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\ cos\theta\ d\theta \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}$$

La función de distribución de θ se obtiene por integración de $f_\Theta(\theta)$

$$F_\Theta(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{cos\alpha}{2}\ d\alpha = \frac{1+sen\theta}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

con $F_\Theta(\theta) = 0$ si $\theta < -\frac{\pi}{2}$ y $F_\Theta(\theta) = 1$ si $\theta > \frac{\pi}{2}$.

$f_\Theta(\theta)$ es una función par simétrica con respecto a $\theta = 0$, punto en que alcanza su valor máximo (ver siguiente figura).

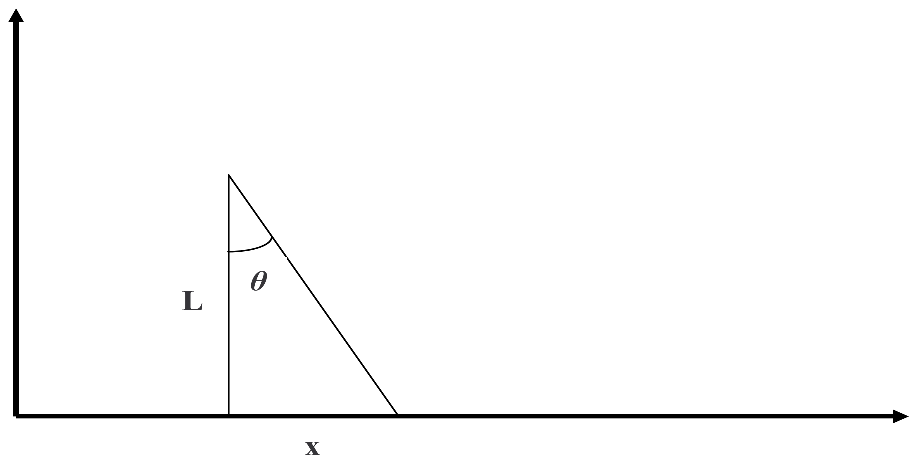


Es decir, la mediana y la moda coinciden y son nulas. Con respecto a la media, si existe, también será nula. Comprobémoslo:

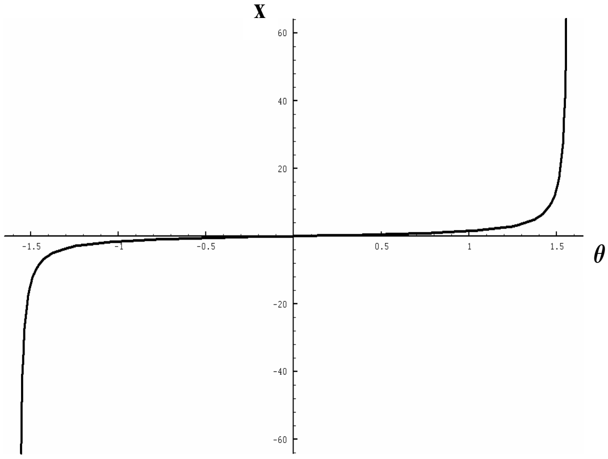
$$E[\theta] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta\ cos\theta}{2} d\theta = 0$$

(b) Para determinar la distribución de la coordenada X del punto de llegada de la partícula, se debe establecer la relación con el ángulo θ, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. De las relaciones trigonométricas elementales se obtiene que para cualquier x,

$$x = L\ tg\theta, \quad \Rightarrow \quad \theta = arctg\frac{x}{L}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{L}{L^2 + x^2}, \text{ (ver siguiente figura)}$$



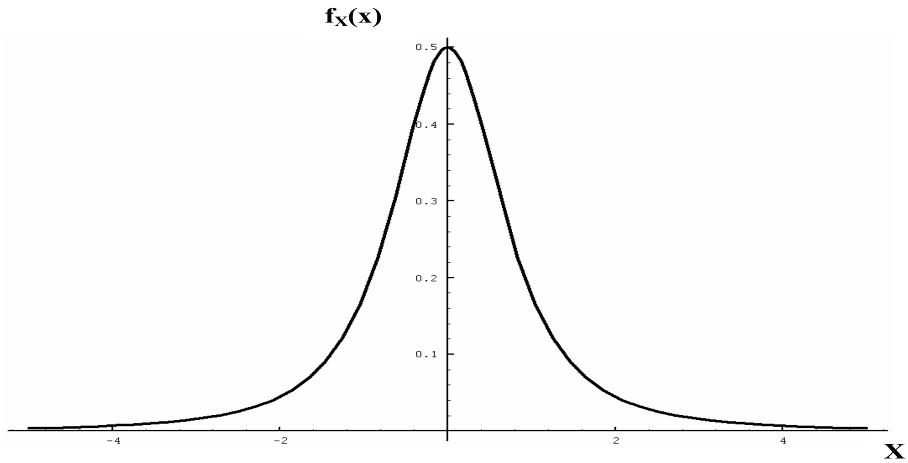
Esta relación $(\theta - x)$ es monótona creciente (ver siguiente figura)



y por lo tanto

$$f_X(x) = \left|\frac{d\theta}{dx}\right| f_\Theta(arctg\frac{x}{L}) = \frac{L^2}{2(L^2+x^2)^{3/2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Esta distribución puede verse en la siguiente figura.



(c) La distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{L^2}{2(L^2+t^2)^{3/2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{(L^2+x^2)}}$$

Para calcular x_0 debemos resolver $P[-x_0 \leq x \leq x_0] = 0.90$ o, lo que es lo mismo, $F_X(x_0) = 0.95$. Por tanto

$$F_X(x_0) = 0.95 = \frac{1}{2} + \frac{x_0}{2\sqrt{(L^2+x_0^2)}}$$

de donde obtenemos $x_0 = 2.065L$.

Es decir, si la caída del contenedor se produce a 100 Km de la costa, sólo podremos cubrir, aproximadamente 400 Km, lo cual parece representar una importante longitud, pero sólo nos permite recoger el 90 % de los pellets. Pese a las simplificaciones del planteamiento, se desprende que la dispersión de las partículas es un punto fundamental y se debiera intentar reducirla, ya sea disminuyendo L o actuando sobre las trayectorias de las partículas.