Cálculo de probabilidades y estadística **Examen Primer Parcial**

EJERCICIO 1 (SOLUCIONES) **25 de enero de 2024**

1.– En una instalación fotovoltaica, se han instalado 210 paneles solares. La vida útil de cada panel puede considerarse normalmente distribuida con media $m = 20$ años y $\sigma = 1.2$ años. Calcular la probabilidad de que en la instalación, por lo menos 20 paneles duren menos de 18.5 años.

Con el fin de reducir la probabilidad de fallo, se desea calcular que especificaciones se deben requerir en el pliego para que la probabilidad de que por lo menos 20 duren menos de 18.5 años sea inferior al 10 %. Entiéndase por especificaciones la media de vida útil del panel, manteniendo constante la varianza.

Ante la imposibilidad de mejorar la media de la vida útil, finalmente se ha recurrido a contratar una segunda empresa instaladora que asegura que cada panel está también normalmente distribuido y tiene una media $m = 20$ años y $\sigma = 1.8$ años. Si cada empresa instala el mismo número de paneles, ¿cuál es la probabilidad que tomando un panel al azar que dure menos de 18.5 años, este haya sido instalado para la segunda empresa?

——————————SOLUCIÓN——————————

Sea X la vida útil de un pnale. Sabemos que $X \equiv N(20, \sigma = 1.2)$. Llamemos éxito al suceso "un panel dura menos de 18.5 años". La probabilidad de este suceso es

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.2}\Big) = F_U(-1.25) = 0.1056$$

Si tenemos 210 paneles y suponemos que su duración es independiente, el número N de paneles que durarán menos de 18.5 será $N \equiv B(210, p)$ donde p es la probabilidad calculada anteriormente, es decir $N \equiv B(210, 0.1056)$.

Queremos calcular la probabilidad de que en los 210 paneles haya al menos 20 "éxitos". Es decir

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - \sum_{i=0}^{19} P_N(i) = 1 - \sum_{i=0}^{19} \binom{100}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Como $np \approx 22.19$ y $n(1-p) \approx 187.8$ podemos aproximar esta binomial por una normal a efectos de cálculo, es decir $N \equiv B(210, 0.1056) \approx N(np, \sigma^2 = np(1-p)) = N(22.19, \sigma^2 = 19.84)$

Entonces

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - F_U\Big(\frac{19.5 - 22.19}{4.45}\Big) = 1 - F_U(-0.603) = 1 - 0.273 = 0.727$$

Luego la probabilidad pedida es

$$p = 72.7\,\%$$

En este caso, lo que se pide es el valor de la media de la vida útil de un panel, esto es: $X \equiv N(m_x, \sigma = 1.2)$. Determinar el valor de m_x para que la probabilidad de que al menos 20 panales duren menos de 18.5 años sea inferior al 10 %.

En este caso $N \equiv B(210, p) \approx N(np, \sigma^2 = np(1-p)) = N(210p, \sigma^2 = 210p(1-p))$. Asumiendo que $np > 5$ y $n(1-p) > 5$

$$P[N \geq 20] = 1 - F_N(19) = 1 - F_U\Big(\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}}\Big) \leq 0.1$$

De la ecuación anterior obtenemos que

$$F_U\Big(\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}}\Big) \geq 0.9$$

Buscando en la tabla obtenemos:

$$\frac{19.5 - 210p}{\sqrt{210p(1-p)}} = 1.282$$

Despejando

$$p \leq 0.0702$$

Ahora debemos buscar el valor de la media de X tal que obtenemos el valor de $p = 0.0702$

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - m_x}{1.2}\Big) = 0.0702$$

$$\frac{18.5 - m_x}{1.2} = -1.4743$$

Y despejando obtenemos que $m_x = 20.27$ años.

En el caso de que haya dos empresas instaladoras. Llamemos Y la vida útil de un panel de la segunda empresa. Sabemos que $Y \equiv N(20, \sigma = 1.8)$

$$P[X \leq 18.5] = F_X(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.2}\Big) = F_U(-1.25) = 0.1056$$
$$P[Y \leq 18.5] = F_Y(18.5) = F_U\Big(\frac{18.5 - 20}{1.8}\Big) = F_U(-0.833) = 0.2023$$

Llamemos C al suceso, "'un panel tomado al azar ha durado menos de 18.5 años"'.

Por tanto la probabilidad solicitada es:

$$P[Y \leq 18.5|C] = \frac{P[C|Y \leq 18.5]P[Y \leq 18.5]}{P[C]}$$

donde $P[C]$ la podemos calcular aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P[C] = P[Y \leq 18.5]0.5 + 0.5P[X \leq 18.5] = 0.1540$$

Y por tanto la probabilidad pedida es

$$P[Y \leq 18.5|C] = \frac{0.2023 \times 0.5}{0.1540} = 0.6568$$

2.– Dos cadenas de fabricación, A y B, tienen diferentes tolerancias, de forma que la medida de de un producto defectuoso fabricado por A es $p_A = 0.05$ y fabricado por B es $p_B = 0.02$. Los ritmos de fabricación también son diferentes, con $N_A = 300$ unidades/hora y $N_B = 200$ unidades/hora. Al salir de las cadenas los productos se mezclan y se embalan indistintamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 100 unidades, 2 sean defectuosas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida al azar una unidad, y resultando defectuosa, haya sido fabricada por la cadena B?

———————SOLUCIÓN———————

La probabilidad de que una unidad sea fabricada por A es $P[A] = 3/5 = 0.6$ y la de que sea fabricada por B es $P[B] = 2/5 = 0.4$.

a) Sea D es suceso una pieza es defectuosa. Sabemos que $P[D|A] = p_A = 0.05$ y $P[D|B] = p_B = 0.02$. Aplicando el teorema de probabilidad total

$$P[D] = P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B] = 0.05 \times 0.6 + 0.02 \times 0.4 = 0.038$$

Sea R la probabilidad de que entre 100 piezas (ya mezcladas) haya dos defectuosas. Obviamente

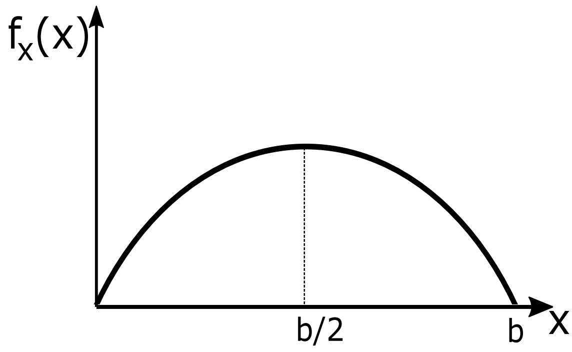
$$R = \binom{100}{2} 0.038^2 (1 - 0.038)^{98} = 0.16$$

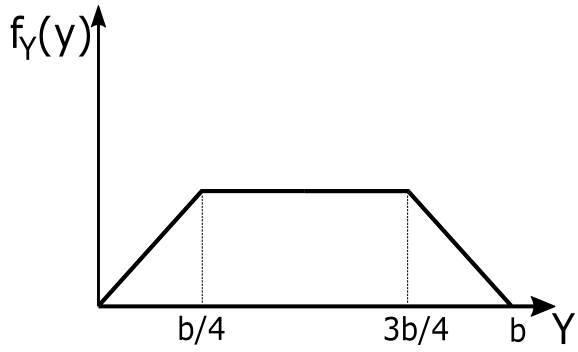
En la expresión anterior, $\binom{100}{2}$ es el número de posiciones distintas que pueden ocupar las dos piezas defectuosas entre las 100 unidades mezcladas.

b) debemos calcular $P[B|D]$. Aplicando el teorema de Bayes

$$P[B|D] = \frac{P[D|B]P[B]}{P[D|A]P[A] + P[D|B]P[B]} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.038} = 0.21$$

3.– Se sabe que las variables aleatorias X e Y tienen como función de densidad la siguiente figura:





Se pide:

a) Determinar la función de densidad y la función de distribución acumulada tanto para X como para Y.

b) Calcular la esperanza matemática de X, Y y $Z = X + Y$.

NOTA: La función de densidad de X es una parábola.

——————————SOLUCIÓN——————————

a)

Primero determinaremos el rango, función de densidad y función de distribución acumulada de X. El rango de X es $R_X = [0, b]$, la función de densidad es una parábola de la forma: $f_X(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$

La función de densidad debe verificar que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(b, 0)$. Además de verificarse que $\int_0^b f_X(x)dx = 1$

Al imponer las restricciones obtenemos $f_X(0) = a_3 = 0$, $f_X(b) = a_1b^2 + a_2b = 0$, $\int_0^b f_X(x)dx = \frac{a_1}{3}b^3 + \frac{a_2}{2}b^2 = 1$.

Por tanto:

$$f_X(x) = \frac{-6}{b^3}x^2 + \frac{6}{b^2}x$$

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x)dx = \frac{-6}{3b^3}x^3 + \frac{6}{2b^2}x^2 = \frac{-2}{b^3}x^3 + \frac{3}{b^2}x^2$$

.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{-2}{b^3}x^3 + \frac{3}{b^2}x^2 & 0 \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Respecto a Y, $R_Y = [0, b]$

$$f_Y(y) = \begin{cases} c_1y & 0 \leq y \leq b/4 \\ c_2 & b/4 \leq y \leq 3b/4 \\ c_3y + c_4 & 3b/4 \leq y \leq b \end{cases}$$

Al imponerle las condiciones obtenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{16}{3b^2}y & 0 \leq y \leq \dfrac{b}{4} \\ \dfrac{4}{3b} & \dfrac{b}{4} \leq y \leq \dfrac{3b}{4} \\ -\dfrac{16}{3b^2}y + \dfrac{16}{3b} & \dfrac{3b}{4} \leq y \leq b \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \dfrac{8}{3b^2}y^2 & 0 \leq y \leq \dfrac{b}{4} \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{3b}(y - \dfrac{b}{4}) & \dfrac{b}{4} \leq y \leq \dfrac{3b}{4} \\ \dfrac{5}{6} - \dfrac{16}{6b^2}(y^2 - \dfrac{9b^2}{16}) + \dfrac{16}{3b}(y - \dfrac{b}{4}) & \dfrac{3b}{4} \leq y \leq b \\ 1 & y \geq b \end{cases}$$

b) Dada la simetría en la función de densidad es directo determinar que

$$E[X] = E[Y] = b/2$$

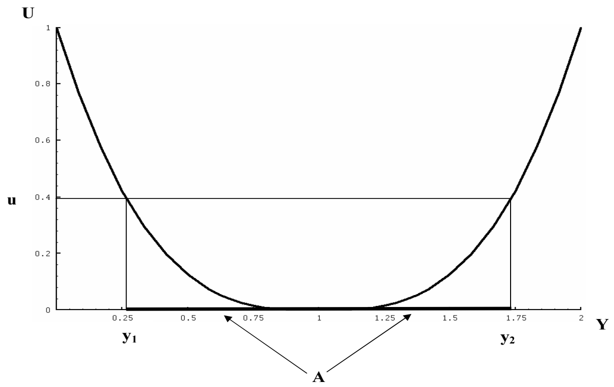
Como $Z = X + Y$

$$E[Z] = E[X] + E[Y] = b/2 + b/2 = b$$

4.– Sea Y la variable aleatoria resultante de sumar dos variables uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Sea $U = \left|(Y-1)^3\right|$. Calcúlese la distribución de U, su media y su varianza.

SOLUCIÓN

Nos piden determinar la función de densidad de $U = \left|(Y-1)^3\right|$. Esta función es como muestra la figura. Utilizaremos, pues, funciones de distribución acumulada.



Según lo que indica la figura

$$P[U \leq u] = P[Y \in A] = P[y_1 \leq y \leq y_2] = F_Y(y_2) - F_Y(y_1)$$

Pero obviamente $y_1 = 1 - u^{1/3}$ e $y_2 = 1 + u^{1/3}$, y hay que tener en cuenta que $R_U = [0,1]$. Como es conocido,la función de distribución acumulada de Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 - \dfrac{(y-2)^2}{2} & 1 \leq y < 2 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$F_U(u) = 1 - \frac{(1+u^{1/3}-2)^2}{2} - \frac{(1-u^{1/3})^2}{2} = 1 - (u^{1/3}-1)^2$$

Obsérvese que esta función cumple los requisitos de una función de distribución acumulada. La función de densidad de U es, por tanto,

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{2}{3}\left(u^{-2/3} - u^{-1/3}\right), \quad 0 \leq u \leq 1$$

y se comprueba inmediatamente que es una función de densidad (aunque es más sencillo comprobar que la función de distribución acumulada cumple las condiciones necesarias).

La media y la varianza se calculan de la siguiente forma:

$$E[U] = \int_0^1 u f_U(u)du = \int_0^1 u\frac{2}{3}\left(u^{-2/3} - u^{-1/3}\right)du = \frac{1}{10}$$

$$Var[U] = \int_0^1 (u-1/10)^2 f_U(u)du = \int_0^1 (u-1/10)^2\frac{2}{3}\left(u^{-2/3} - u^{-1/3}\right)du = \frac{9}{350}$$