Cálculo de probabilidades y estadística **Examen Primer Parcial**

EJERCICIO 2 (SOLUCIONES) **13 de enero de 2025**

1.– La última prueba de las olimpiadas es tradicionalmente la maratón y su final suele coincidir con el inicio de la ceremonia de clausura. Para fijar la hora de inicio de los actos es por lo tanto necesario prever el tiempo de llegada del último corredor. A partir de datos históricos se ha establecido que en cada maratón el tiempo del último corredor que alcanza la meta sigue una distribución exponencial desplazada de parámetros $\lambda = 5$ horas^{-1} y $a = 2.5$ horas, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, x \geq a$$

Se pide:

a) Determinar el tiempo medio que necesita el último atleta para cubrir el trayecto

b) Si planificamos el comienzo del acto de clausura 3 horas más tarde que el inicio de la maratón, ¿qué probabilidad hay de que empiece dicho acto cuando todavía hay atletas disputando la carrera?

————————SOLUCIÓN————————

a) La esperanza matemática de X es

$$E[X] = \int_a^\infty x\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx = \int_0^\infty (u+a)\lambda e^{-\lambda u}du = \frac{1}{\lambda} + a$$

Con nuestros valores $\boxed{E[X] = 2.7 \text{ horas}}$

b) Nos piden $P[X > 3] = 1 - F_X(3)$. La función de distribución acumulada es

$$F_X(x) = \int_a^x \lambda e^{-\lambda(x-a)}dx = 1 - e^{-\lambda(x-a)}, x \geq a$$

Y por lo tanto

$$\boxed{P[X > 3] = 1 - F_X(3) = 1 - \left[1 - e^{-5(3-2.5)}\right] = 0.082 = 8.2\,\%}$$

2.– Durante cualquier año, la probabilidad de que en cierta región se produzcan uno o dos huracanes es de 0.3 y 0.05, respectivamente. Se asume que la probabilidad de que se produzcan tres o más huracanes en un año es despreciable.

Esta región puede verse afectada por inundaciones debidas al deshielo en las zonas situadas en cabecera de la cuenca, o por las fuertes precipitaciones asociadas a los huracanes, o a ambos factores. La probabilidad de que el deshielo (que se produce invariablemente una vez cada año) cause por sí solo una inundación es del 13.2 %. Sin embargo, durante un huracán hay una probabilidad de inundación del 25 %.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca alguna inundación en esta región en un año prefijado?

(b) Sabiendo que se ha producido alguna inundación, ¿cuál es la probabilidad de que no se hayan registrado huracanes ese año?

———————SOLUCIÓN———————

Definamos claramente los sucesos que utilizamos, todos referidos a un año:

D "deshielo"; H_1 "se produce un huracán"; H_2 "se producen dos huracanes"; I "inundación"; I_D "inundación producida por deshielo; "I_H "inundación producida por huracanes".

Los datos que conocemos son:

$P[D] = 1;\quad P[H_1] = 0.3;\quad P[H_2] = 0.05;\quad P[I_D] = 0.132;\quad P[I_H|H_1] = 0.25$

a) Calculemos la probabilidad de que se produzca una inundación debida a huracanes. Teniendo en cuenta que los sucesos H_1 y H_2 son incompatibles, podemos escribir aplicando el teorema de probabilidad total

$$P[I_H] = P[I_H|H_1]P[H_1] + P[I_H|H_2]P[H_2] = 0.25 \times 0.3 + P[I_H|H_2] \times 0.05$$

Si suponemos que los huracanes son independientes puede suceder que haya inundación en el primero, que haya inundación en el segundo, o que haya inundación en ambos, ya que, obviamente, no son sucesos incompatibles. Por tanto

$$P[I_H|H_2] = 0.25 + 0.25 - (0.25 \times 0.25) = 0.4375$$

y consecuentemente $P[I_H] = 0.25 \times 0.3 + 0.4375 \times 0.05 = 0.096875$

La probabilidad de que se produzca alguna inundación es, claramente, $P[I] = P[I_D \cup I_H]$. Pero los sucesos I_D e I_H no son incompatibles, aunque si independientes. Por tanto

$$P[I] = P[I_D \cup I_H] = P[I_D] + P[I_H] - P[I_D \cap I_H] = P[I_D] + P[I_H] - P[I_D]P[I_H] =$$
$$= 0.132 + 0.096875 - 0.132 \times 0.096875 = \boxed{0.216}$$

b) Nos preguntan $P[H_0|I]$ siendo H_0 el suceso "no se han producido huracanes ese año". Los sucesos H_0, H_1 y H_2 son incompatibles y llenan el espacio (es decir, su unión es el espacio total). Luego podemos aplicar el teorema de Bayes

$$P[H_0|I] = \frac{P[I|H_0]P[H_0]}{P[I|H_0]P[H_0] + P[I|H_1]P[H_1] + P[I|H_2]P[H_2]} = \frac{P[I|H_0]P[H_0]}{P[I]}$$

Pero $P[I|H_0] = P[I_D] = 0.132$. Luego

$$P[H_0|I] = \frac{P[I_D]P[H_0]}{P[I]} = \frac{0.132 \times 0.65}{0.216} = \boxed{0.397}$$

———

3.– Un cierto programa de ordenador incluye el cálculo de una integral. El tiempo necesario, T, para calcular dicha integral es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

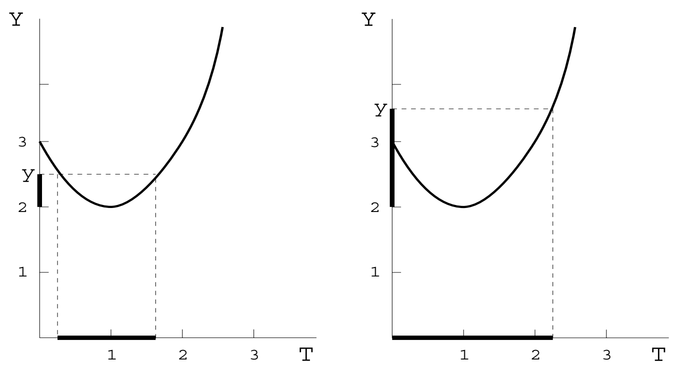
El tiempo total de cálculo del programa es $Y = (T-1)^2 + 2$. Calcular la distribución de Y.

——————————SOLUCIÓN——————————

La función de distribución acumulada de T es

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\, ds = 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Al representar $Y = (T-1)^2 + 2$ vemos que $R_Y = [2, \infty[$ y que la relación entre las variables Y y T no es monótona. Para calcular la función de distribución acumulada $F_Y(y) = P[Y \leq y]$ tenemos que distinguir dos casos, $2 \leq y \leq 3$ y $3 \leq y$. Gráficamente



Teniendo en cuenta

$$y = (t-1)^2 + 2 \Rightarrow t = 1 \pm \sqrt{y-2},$$

para $y \in [2,3]$ podemos poner

$$\begin{aligned} P[Y \leq y] &= P[1 - \sqrt{y-2} \leq T \leq 1 + \sqrt{y-2}] \\ &= F_T(1+\sqrt{y-2}) - F_T(1-\sqrt{y-2}) = 1 - e^{-\lambda(1+\sqrt{y-2})} - (1 - e^{-\lambda(1-\sqrt{y-2})}) \end{aligned}$$

mientras que para $y \geq 3$,

$$\begin{aligned} P[Y \leq y] &= P[T \leq 1 + \sqrt{y-2}] = F_T(1+\sqrt{y-2}) \\ &= 1 - e^{-\lambda(1+\sqrt{y-2})} \end{aligned}$$

En definitiva

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 2 \\ e^{-\lambda}(e^{\lambda\sqrt{y-2}} - e^{-\lambda\sqrt{y-2}}) & \text{si } 2 \leq y \leq 3 \\ 1 - e^{-\lambda(1+\sqrt{y-2})} & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$