Cálculo de probabilidades y estadística **Examen Primer Parcial**

EJERCICIO 1 (SOLUCIONES) **13 de enero de 2025**

1.– Un cierto sistema está compuesto por tres elementos conectados en serie. Consecuentemente, el sistema falla si cualquiera de ellos falla. Dichos elementos funcionan independientemente. El tiempo de vida de cada elemento (medido en horas) puede considerarse normalmente distribuido, con media 125 horas y desviación típica 20 horas.

a) Determínese la probabilidad de que el sistema funcione al menos durante 100 horas.

b) ¿Cuántos elementos de este tipo se pueden conectar como máximo en serie si queremos que la probabilidad mencionada en el apartado anterior no sea inferior al 50 %.?

c) Si en lugar de conectar los tres elementos en serie los colocamos en paralelo, de forma que con uno de ellos funcionando funcionase todo el sistema, ¿cuál será en este caso la probabilidad de que la duración del sistema supere las 100 horas?

d) Ahora colocamos los elementos en pararalelo, pero con un funcionamiento diferente. Empieza a funcionar el primero, cuando falla empieza el segundo, y cuando falla empieza el tercero. ¿Cuál será en este caso la probabilidad de que la duración del sistema supere las 100 horas?

———————SOLUCIÓN———————

a) Sea Y el tiempo de vida mínimo del sistema. Si llamamos X_1, X_2 y X_3 al tiempo de vida de cada uno de los tres elementos, $Y = min\{X_1, X_2, X_3\}$ Por tanto

$$P[Y > y] = P\Big[(X_1 > y) \cap (X_2 > y) \cap (X_3 > y)\Big] = (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y))(1 - F_{X_3}(y)) = \Big[(1 - F_X(y))\Big]^3$$

teniendo en cuenta independencia, y siendo X la vida de uno cualquiera de los tres elementos.

Por tanto

$$P[Y > 100] = \Big[(1 - F_X(100))\Big]^3 = \Bigg[\Bigg(1 - F_U\Big(\frac{100-125}{20}\Big)\Bigg)\Bigg]^3 = \Bigg[\Bigg(1 - F_U(-1.25)\Bigg)\Bigg]^3 = 0.8944^3 = 0.715$$

b) Nuestra ecuación sería ahora, si n es el número de elementos conecatdos en serie,

$$\Bigg[\Bigg(1 - F_U(-1.25)\Bigg)\Bigg]^n = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.8944^n = 0.5 \quad \Rightarrow \quad n = 6.21$$

luego no se pueden conectar más de seis elentos en serie.

c) Si los conectamos en paralelo, estaríamos hablando del máximo y no del mínimo. Sea $Z = max\{X_1, X_2, X_3\}$. Por consiguiente

$$P[Z \leq z] = P\Big[(X_1 \leq z) \cap (X_2 \leq z) \cap (X_3 \leq z)\Big] = (F_{X_1}(z))(F_{X_2}(z))(F_{X_3}(z)) = \Big[F_X(z)\Big]^3$$

Luego

$$P[Z > 100] = 1 - \Big[F_X(100)\Big]^3 = 1 - \left[F_U\Big(\frac{100-125}{20}\Big)\right]^3 = 1 - \Big[F_U(-1.25)\Big]^3 = 1 - 0.1056^3 = 0.9988$$

Obsérvese que en este caso, la probabilidad aumenta con el número de elementos conectados.

d) Ahora la vida del sistema, R, es la suma de la duración de los tres componentes. Es decir, $R = X_1 + X_2 + X_3$. Pero las tres variables son normales e independientes, con media 125 y varianza 400. Luego R es también normal con media 375 y varianza 1200. Luego

$$P[R > 100] = 1 - F_R(100) = 1 - F_U\Big(\frac{100-375}{\sqrt{1200}}\Big) = 1 - F_U(-7.9386) = 1$$

2.– Sea X el tiempo que debemos esperar para que un proveedor te sirva un pedido. Así, ese tiempo puede obtenerse a su vez como suma de dos variables aleatorias $X = Y + Z$ dónde Y representa el tiempo hasta que te atienden y toman nota del pedido y Z es el tiempo que se tarda en procesar y enviar el pedido. Se conoce que la distribución conjunta de X e Y es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}e^{-x/2} \quad ; \quad 0 \leq y \leq x; \quad 0 \leq x \leq \infty$$

Calcúlese:

a) El tiempo medio que tardan en servir un pedido (tiempo total).

b) El tiempo medio que se tarda en procesar y enviar el pedido.

c) La distribución del tiempo que se tarda en procesar y enviar el pedido.

d) El coeficiente de correlación entre el tiempo total y el tiempo en que tardan en atenderte.

SOLUCIÓN

Para calcular la esperanza matemática de X primero necesitamos su función de densidad marginal $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^x f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x \frac{1}{4}e^{-x/2}dy = \frac{1}{4}\ x\ e^{-x/2}$$

Por tanto, la esperanza de la variable X es:

$$E[X] = \int_0^\infty x\ f_X(x)dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^2\ e^{-x/2}dx$$

La integral de arriba se puede integrar por partes dos veces hasta llegar a:

$$E[X] = \frac{1}{4}\left(-2x^2e^{-x/2}\Big|_0^\infty + 4\left(-2xe^{-x/2}\Big|_0^\infty - 4e^{-x/2}\Big|_0^\infty\right)\right) = 4 \text{ minutos}$$

b) La esperanza del tiempo que se tarda en procesar y enviar el pedido será la esperanza de la variable aleatoria Z, por tanto de la relación lineal $Z = X - Y$:

$$E[Z] = E[X - Y] = E[X] - E[Y]$$

Necesitamos la esperanza de Y. Procedemos como en el apartado anterior, calculamos la función de densidad marginal de la variable aleatoria Y y después su esperanza matemática:

$$f_Y(y) = \int_y^\infty f_{XY}(x,y)dx = \int_y^\infty \frac{1}{4}e^{-x/2}dx = \frac{-2}{4}e^{-x/2}\Big|_y^\infty = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

Por tanto la esperanza de la variable Y es:

$$E[Y] = \int_0^\infty \frac{1}{2}\ y\ e^{-y/2}dy = 2 \text{ minutos}$$

Por tanto la esperanza del tiempo que tarda en procesar y enviar el pedido es:

$$E[Z] = E[X] - E[Y] = 4 - 2 = 2 \text{ minutos}$$

c) En este caso se pide la distribución de Z, $Z = X - Y$:

Si fijamos $X = x$, entonces $Z = x - Y$ Por ser una relación monótona podemos escribir

$$f_{Z|X}(z,x) = \left|\frac{dy}{dz}\right| f_{Y|X}(y,x) = f_{Y|X}(x-z,y)$$

y

$$f_{Z,X}(z,x) = f_{Z|X}(z,x)f_X(x) = f_{XY}(x,x-z)$$

Ahora, integramos para hallar la distrución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_X} f_{Z,X}(z,x)\mathrm{d}x = \int_{R_X} f_{XY}(x,x-z)\mathrm{d}x$$

$$f_Z(z) = \int_z^\infty \frac{1}{4}e^{-x/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{-z/2}$$

Fijemos $Y = y$. Entonces $Z = X - y$. Por ser una relación monótona podemos escribir

$$f_{Z|Y}(z,y) = \left|\frac{dx}{dz}\right| f_{X|Y}(x,y) = f_{X|Y}(z+y,y)$$

y

$$f_{Z,Y}(z,y) = f_{Z|Y}(z,y)f_y(y) = f_{X|Y}(z+y,y)f_y(y) = f_{XY}(z+y,y)$$

Ahora, integramos para hallar la distrución marginal de Z

$$f_Z(z) = \int_{R_Y} f_{Z,Y}(z,y)\mathrm{d}y = \int_{R_Y} f_{XY}(z+y,y)\mathrm{d}y$$

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{4}e^{-(z+y)/2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^{-z/2}$$

d) El coeficiente de correlación ρ_{XY} es:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Dónde a su vez la covarianza σ_{XY} y las varianzas para calcular las desviaciones típicas marginales se pueden obtener como:

$$\sigma_{XY} = E[XY] - E[X]E[Y] = \int\int_{R_{XY}} x\ y\ f_{XY}(x,y)\ dx\ dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty \int_0^x x\ y\ e^{-x/2}dxdy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\infty xe^{-x/2}\left(\int_0^x y\ dy\right) = \frac{1}{8}\int_0^\infty x^3\ e^{-x/2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-2x^3e^{-x/2}\Big|_0^\infty + 6\underbrace{\int_0^\infty x^2e^{-x/2}dx}_{=16}\right) = 12$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E^2[Y]$$

dónde:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^\infty x^3e^{-x/2}dx}_{96} = 24$$

$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 f_Y(y)dy = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty y^2e^{-y/2}dy}_{16} = 8$$

Por tanto, el coeficiente de correlación:

$$\rho_{XY} = \frac{12 - 4\cdot 2}{\sqrt{24-4^2}\sqrt{8-2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.– A un silo de almacenamiento llegan diariamente N cargas de cemento. N está distribuido según Poisson con parámetro $\lambda = 2$ cargas/día. La instalación de descarga del silo puede procesar hasta tres cargas por día; el exceso de carga es despachado a otros silos. Se pide:

a) Probabilidad de procesar todas las cargas que llegan en un día.

b) ¿En cuánto debería ampliarse la instalación de descarga para que la probabilidad de tener que rechazar cargas en un día cualquiera sea de 0.1?

c) ¿Cuál es el número más probable de cargas que se procesarán en un día?

d) Calcular la esperanza matemática del número de cargas procesadas y rechazadas cada día.

————————SOLUCIÓN————————

(a) En términos de la variable aleatoria N, el suceso cuya probabilidad nos preguntan es $[N \leq 3]$ ya que 3 es la capacidad máxima de la instalación. La distribución de una variable de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ en un período de tiempo unidad es

$$P[N = n] = e^{-2}\frac{2^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

de forma que

$$\begin{aligned} P[N \leq 3] &= P[N = 0] + P[N = 1] + P[N = 2] + P[N = 3] \\ &= e^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}) = 0.8571 \end{aligned}$$

(b) Sea n_0 la nueva capacidad diaria de la instalación de descarga. Siendo de nuevo N la variable aleatoria "número de cargas que llegan al silo durante un día", n_0 ha de cumplir que $P[N > n_0] \leq 0.1$, es decir, $P[N \leq n_0] \geq 0.9$. De la misma forma que en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} P[N \leq n_0] &= \sum_{n=0}^{n_0} P[N = n] = e^{-2}\sum_{n=0}^{n_0}\frac{2^n}{n!} \\ &= e^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \ldots + \frac{2^{n_0}}{n_0!}) \end{aligned}$$

y para que este valor sobrepase 0.9 es suficiente tomar $n_0 = 4$. Por lo tanto basta aumentar la capacidad de la instalación en una carga.

(c) Sea X la variable aleatoria "número de cargas que se procesan en un día". X es función de la variable N, pero no coincide con ella. Claramente $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$; el suceso $[X = n]$ coincide con $[N = n]$ para $0 \leq n \leq 2$ (si llegan dos cargas o menos, se procesan todas), mientras que el suceso $[X = 3]$ coincide con $[N \geq 3]$ (si llegan tres cargas o más, se procesan tres). Así

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= P[N = 0] = e^{-2} = 0.1353 \\ P[X = 1] &= P[N = 1] = 2e^{-2} = 0.2707 \\ P[X = 2] &= P[N = 2] = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 0.2707 \\ P[X = 3] &= P[N \geq 3] = 1 - (P[N = 0] + P[N = 1] + P[N = 2]) = 0.3233 \end{aligned}$$

El valor más probable para X es por lo tanto 3.

(d) En el apartado anterior calculamos la distribución de la variable aleatoria X (número de cargas procesadas en un día). Su esperanza matemática es

$$E(X) = 0 \cdot P[X = 0] + 1 \cdot P[X = 1] + 2 \cdot P[X = 2] + 3 \cdot P[X = 3] = 1.782$$

La variable aleatoria $Y =$"número de cargas rechazadas en un día" se puede obtener como $Y = N - X$. Por lo tanto $E(Y) = E(N) - E(X)$; teniendo en cuenta que la esperanza de N es $\lambda t = 2 \cdot 1 = 2$ (ver momentos de una variable de Poisson), resulta $E(Y) = 0.2180$.