Cálculo de probabilidades y estadística **Segundo Examen Parcial**

EJERCICIO 2 (1 h. 30 min.) **21 de mayo de 2025**

1.– Los valores observados en una muestra de extensión 14 para la tensión de rotura de cables de kevlar utilizados como tirantes de estructuras metálicas son, en GPa,

9.9	6	5.2	7.3	11.8	10.3	8.2
7.5	6.6	12.6	16.8	12.3	9.8	10.3

Determinar intervalos de confianza para la tensión media de rotura con $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$, así como una cota superior para la varianza poblacional de la variable tensión de rotura.

2.– La distribución

$$f_X(x) = \alpha\beta\Big[1+\beta x\Big]^{-(\alpha+1)}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 2, \quad \beta > 0$$

se denomina de Lomax o de Pareto Tipo II. Se utiliza fundamentalmente en problemas de economía, finanzas y similares. En esta distribución se verifica

$$F_X(x) = 1 - [1+\beta x]^{-\alpha}, \quad E[X] = \frac{1}{\beta(\alpha-1)}, \quad Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

Consideremos en particular el consumo bruto de energía eléctrica anual per cápita en núcleos de población medido en $kW \cdot h$. Según diferentes estudios dicha variable aleatoria puede considerarse distribuida de acuerdo con la distribución anterior.

Para calcular el consumo medio en España, X, se han elegido adecuadamente 50 municipios de los 8124 existentes y se ha calculado el consumo anual per cápita en cada uno de ellos. Esta muestra ha proporcionado, entre otros, los siguientes datos:

$$\max\{x_i\} = 33.1621, \quad \min\{x_i\} = 0.00671, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i = 112.0198$$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1195.6575, \quad \sum_{i=1}^{50} \ln(1+x_i) = 38.4564, \quad \sum_{i=1}^{50} \ln^2(1+x_i) = 57.8090$$

Suponiendo que el parámetro $\beta = 1$, calcular los estimadores de α mediante el método de los momentos y mediante el de máxima verosimilitud.

3.– En el diseño de una obra marítima es fundamental la definición de la altura de ola significante y el periodo de retorno asociado. Para el diseño de un cierto dique se ha estimado que la llegada de temporales sigue una distribución de Poisson con media anual $\nu = 2$ temporales y que la altura máxima de ola en cada temporal, Y, sigue una distribución exponencial con media 2 metros. Se pide calcular la altura de ola significante h_T para que el periodo de retorno asociado sea de 100 años.

Nota: El periodo de retorno T expresado en años de una ola de altura h_T, expresada en metros, es el valor que verifica $P[h \geq h_T] = 1/T$.

Nota 2: Se recuerda que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$
