Cálculo de probabilidades y estadística **Segundo Examen Parcial**

EJERCICIO 1 (1 h. 30 min.) **21 de mayo de 2025**

1.– La nota de Cálculo de Probabilidades y Estadística de un estudiante elegido al azar tiene por función de densidad

$$f_X(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}, \quad 0 \leq x \leq \theta, \quad \theta > 0$$

En el grupo hay un total de n=25 estudiantes. Solamente se conoce la nota máxima de la clase. Se pide:

a) Determinar la distribución de la nota máxima de la clase.

b) Determinar un estimador de máxima verosimilitud para θ. (Se recuerda que sólo se conoce la máxima nota de la clase)

c) Determinar la cota superior de θ con una confianza del 90 % si se sabe que la nota máxima de la clase es 9.25.

2.– Una fábrica vierte a una ría a través de un colector las aguas procedentes de un proceso industrial contaminante tras aplicar los oportunos tratamientos de depuración. Las agencias de salud vigilan de forma periódica la calidad del agua vertida mediante la toma y el análisis de muestras. Según la legislación vigente se considera que la cantidad promedio de amoniaco en el agua vertida no debe exceder el valor de 2 ppm (partes por millón o mg/L), con una seguridad del 99 %.

Se pide establecer el contraste a efectuar para comprobar la calidad del agua vertida. Coméntese el significado físico de cada error. Para comprobar la calidad del agua vertida, se toma una muestra de tamaño 16, la cual proporciona una media y una desviación típica muestral insesgada de 1.5 y 1.2 ppm, respectivamente. ¿Se puede considerar que la fábrica cumple la legislación vigente en lo referente a la calidad del agua vertida? Calcúlese el nivel p obtenido.

3.– La duración en horas, X, de unas lámparas eléctricas fabricadas por una cierta empresa, puede considerarse distribuida normalmente $N(m_x, \sigma_x^2)$ con $\sigma_x = 250$ horas. Para realizar el control de calidad se toman 10 lámparas de una misma partida, obteniendo las duraciones $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Se pretende contrastar la hipótesis $H_o\colon m_x \geq 2000$ frente a $H_1\colon m_x < 2000$ haciendo uso del estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i$$

a) Calcular el nivel de significación α del contraste si la región de aceptación es $\bar{x} \geq 1870$.

b) Para evitar cálculos adicionales y acelerar el proceso de control, se quiere sustituir

este contraste por uno basado en el estadístico

$$M = min[x_1, x_2, \ldots, x_{20}]$$

que utiliza una muestra con el doble de lámparas. Calcular la nueva región de aceptación para el mismo nivel de significación del apartado anterior.

c) Calcular la potencia de ambos contrastes cuando la verdadera media es $m_x = 1800$ horas, y compararlos.