1.– Con el fin de evitar problemas de tráfico en una determinada carretera nacional que atraviesa un pequeño pueblo se ha proyectado una vía de circunvalación (ver en la figura la circunvalación una vez realizada). Si consideramos uno de los sentidos del tráfico, se asume que todos los vehículos que no tienen destino en el pueblo toman la circunvalación. El número de vehículos , X, que tomarán diariamente la circunvalación en ese sentido del tráfico se supone exponencialmente distribuido con parámetro λ_1. Adicionalmente, del pueblo salen en ese sentido Y vehículos diarios, pudiendo considerarse que esta variabla aleatoria es también exponencial con parámetro λ_2.

En el estudio de tráfico pertinente se ha definido la variable U como el tanto por uno de vehículos que tomarán la circunvalación sobre el total de vehículos que pasan por la carretera una vez que la circunvalación converja con la carretera nacional (en el sentido considerado).

Se pide:

a) Calcular la distribución del tráfico diario Z en ese sentido de circulación una vez que la circunvalación converja con la carretera nacional.

b) Calcular la distribución de la variable U.

c) ¿Pueden ser en algún caso U y Z independientes?

2.– La variables aleatorias X e Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

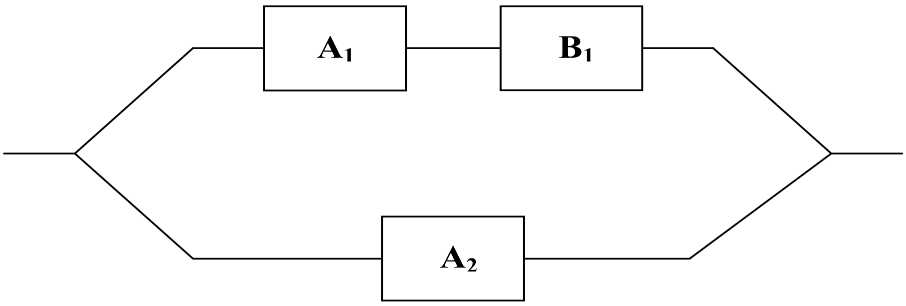
$$f_{XY}(x,y) = kx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x.$$

a) Determínese k para que dicha función esté bien definida.

b) Determínese la función de distribución acumulada conjunta.

c) Calcúlese las distribuciones marginales, tanto las funciones de densidad como las de distribución acumulada, de X y de Y.

3.– Una central hidroeléctrica tiene algunos sistemas duplicados con el fin de mejorar la seguridad del servicio. Un sistema hidráulico S, representado en la figura, falla (S = 0) si las dos ramas en paralelo que lo componen R_1, R_2 fallan simultáneamente $(R_1 = 0, R_2 = 0)$.



La rama R_1 tiene dos elementos A_1 y B_1 en serie y funciona si ambos elementos no fallan $(A_1 = 1, B_1 = 1)$. A_1 y B_1 funcionan independientemente. La rama R_2 tiene un solo elemento A_2, es decir $R_2 = 0$ si $A_2 = 0$. Se sabe que A_2 y B_1 funcionan independientemente y se conocen las siguientes probabilidades:

$$p_0 = P[A_1 = 0 | A_2 = 0] = P[A_2 = 0 | A_1 = 0]$$
$$p_1 = P[A_1 = 0 | A_2 = 1] = P[A_2 = 0 | A_1 = 1]$$
$$p_b = P[B_1 = 0]$$

Se pide

a) Hallar las probabilidades $P[A_1 = 0]$ y $P[A_2 = 0]$.

b) Hallar las probabilidades de ambas ramas $P[R_1 = 0]$ y $P[R_2 = 0]$.

c) Hallar la probabilidad de fallo del sistema $P[S = 0]$ y compararla con $P[R_1 = 0]$.
