TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Sean $X_1,\ X_2, ..., X_n$ variables aleatorias continuas

- independientes
- igualmente distribuidas
- con media y varianza finitas

Definamos la variable $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ y sea $Z = \frac{Y_n - m_y}{\sigma_y}$, donde $m_y = E[Y_n]$ y $\sigma_y^2 = Var[Y_n]$.
Entonces, independientemente de la distribución de las variables X_j, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < Z < \infty$$

Demostración

Obviamente, $E[Z] = 0$ y $Var[Z] = 1$. Calculemos la función característica, $C_Z(s)$ de la variable aleatoria Z.

$$C_Z(s) = E[e^{isZ}] = E[e^{is\frac{Y_n - m_y}{\sigma_y}}] \tag{1}$$

Como $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ se verifica que $E[Y_n] = nm_x$ y, al ser las variables X_j independientes, $Var[Y_n] = nVar[X]$. Operando en (1)

$$C_Z(s) = E\Big[e^{is\frac{\sum\left(X_j - m_x\right)}{\sqrt{n}\sigma_x}}\Big] = E\Big[e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\frac{\sum\left(X_j - m_x\right)}{\sigma_x}}\Big] = E\Big[\prod_{j=1}^{n} e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\frac{X_j - m_x}{\sigma_x}}\Big] = \prod_{j=1}^{n} E\Big[e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\frac{X_j - m_x}{\sigma_x}}\Big]$$

ya que las variable X_j son independientes entre si. Como además todas las variables X_j tienen la misma función de densidad,

$$C_Z(s) = \Big\{E\Big[e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\frac{X_j - m_x}{\sigma_x}}\Big]\Big\}^n = \Big\{E\Big[e^{\frac{is}{\sqrt{n}}W}\Big]\Big\}^n$$

donde $W = \frac{X - m_x}{\sigma_x}$ siendo X una cualquiera de las variables X_j.

Desarrollemos ahora $e^{\frac{is}{\sqrt{n}}W}$ en serie de Taylor alrededor del punto $W_o = 0$.

$$e^{\frac{is}{\sqrt{n}}W} = 1 + W\frac{is}{\sqrt{n}} + \frac{W^2}{2}\frac{i^2 s^2}{n} + \frac{W^3}{3!}\frac{i^3 s^3}{n\sqrt{n}}\ e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\xi}, \quad \xi \in (-\infty, \infty)$$

Tomando ahora esperanzas matemáticas y observando que $E[W] = 0$ y $Var[W] = 1$ obtenemos

$$E\Big[e^{\frac{is}{\sqrt{n}}W}\Big] = 1 - \frac{s^2}{2n} - \frac{1}{n}E\Big[\frac{i^3 s^3 W^3}{6\sqrt{n}}\ e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\xi}\Big] = 1 - \frac{s^2}{2n} - \frac{R_n}{n}$$

Por tanto

$$C_Z(s) = \Big[1 - \frac{s^2}{2n} - \frac{R_n}{n}\Big]^n$$

Tomando ahora límites, y recordando que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} C_Z(s) = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - \frac{s^2}{2n} - \frac{R_n}{n}\Big]^n$$

Puede demostrarse (ver por ejemplo Loève, 1976) que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} E\Big[\frac{i^3 s^3 W^3}{6\sqrt{n}}\ e^{\frac{is}{\sqrt{n}}\xi}\Big] = 0$$

Y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} C_Z(s) = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - \frac{s^2}{2n}\Big]^n = \lim_{n\to\infty} \Big[1 - \frac{s^2/2}{n}\Big]^n = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

A partir de aquí, vamos a calcular la función de densidad de Z (en el límite). Recordando que la relación entre la función característica y la función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} C_X(t)\ dt$$

obtenemos

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isz}\ e^{-\frac{s^2}{2}}\ ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\ [cos(-sz) + isen(-sz)]\ ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\ cos(sz)\ ds - i \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{s^2}{2}}\ sen(sz)\ ds\Bigg] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\ cos(sz)\ ds = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\ e^{\frac{-z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-z^2}{2}} \end{aligned}$$

Luego

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-z^2}{2}}, \qquad Z \in (-\infty, \infty) \qquad\qquad c.q.d$$

Obsérvese que como $Z = \frac{Y_n - m_y}{\sigma_y}$, en el límite $Z = \frac{Y-m}{\sigma}$, y operando sencillamente en esta relación lineal se obtiene

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}, \qquad Y \in (-\infty, \infty)$$

que es la usualmente denominada distribución normal con media m y desviación típica σ

REFERENCIA

Loève, M., *Teoría de la Probabilidad*, Editorial Tecnos, Madrid, 1976