# LEMA DE NEYMAN-PEARSON

Para un contraste de hipótesis con hipótesis simples del tipo

$$H_o : \theta = \theta_o$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

utilizando un estadístico $T$, la región critica $R$ para un cierto nivel de significación $\alpha$ que proporciona la máxima potencia $\Pi$ del contraste es la que se obtiene de forma que

$$\frac{f_T(t|\theta_1)}{f_T(t|\theta_o)} > K$$

definiendo los extremos de $R$ la condición

$$\int_R f_T(t|\theta_o)dt = \alpha$$

**Demostración**

Sea $R$ la región crítica definida por la condición de Neyman-Pearson, y considérese un punto $t' \in R$ (ver Figura). Vamos a modificar ligeramente la región crítica, eliminando de $R$ un intervalo $\delta'$ alrededor del punto $t'$ e introduciendo en $R$ la región definida por un intervalo $\delta''$ alrededor de un punto $t'' \notin R$. Obviamente, si no queremos modificar $\alpha$,

$$f_T(t'|\theta_o)\delta' = f_T(t''|\theta_o)\delta''. \tag{1}$$

La potencia del test, $\Pi$, con la región crítica $R$ inicialmente definida por la condición de Neyman-Pearson, es

$$\Pi = \int_R f_T(t|\theta_1)dt$$

y la variación en esta potencia que se produce por el cambio entre los puntos $t'$ y $t''$ es

$$\Delta\Pi = f_T(t''|\theta_1)\delta'' - f_T(t'|\theta_1)\delta' \tag{2}$$

Pero $t' \in R$. Luego

$$\frac{f_T(t'|\theta_1)}{f_T(t'|\theta_o)} > K \quad \Rightarrow \quad f_T(t'|\theta_1) > K f_T(t'|\theta_o) \tag{3}$$

El otro punto $t'' \notin R$. Por tanto

$$\frac{f_T(t''|\theta_1)}{f_T(t''|\theta_o)} \leq K \quad \Rightarrow \quad f_T(t''|\theta_1) \leq K f_T(t''|\theta_o) \tag{4}$$

Ahora vamos a sustituir el primer sumando en la expresión de $\Delta\Pi$ dada por la ecuación (2) por un valor mayor que él, y el segundo sumando (que está restando) por un valor más pequeño, de acuerdo con las dos expresiones (3) y (4) que acabamos de obtener. Entonces

$$\Delta\Pi < K f_T(t''|\theta_o)\delta'' - K f_T(t'|\theta_o)\delta' = K[f_T(t''|\theta_o)\delta'' - f_T(t'|\theta_o)\delta'] = 0$$

tal como se dice en (1) Luego para cualquier región crítica distinta de la obtenida por el Lema de Neyman-Pearson

$$\Delta\Pi < 0$$

lo que indica que $R$ es la región crítica óptima.