DISTRIBUCIONES COMBINADAS / SIMULACIÓN

Ejemplo: En una carretera se producen interrupciones de tráfico debido a unas obras. La duración de las interrupciones se puede modelar como una exponencial de parámetro β. La llegada de vehículos se puede modelar como una Poisson de frecuencia λ. Se pide: ¿Cuál es la distribución de las colas que se formen?

$T =$ duración de una interrupción $= EX(\beta)$

$$\Rightarrow f_T(t) = \beta e^{-\beta\tau}, \quad F_T(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}; \quad \tau \geq 0$$

$N =$ número de coches que lleguen durante una interrupción $= P(\nu)$ con $\nu = \lambda T$

$$\Rightarrow P_N(n) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sea $C =$ tamaño de la cola que se forme

$$P[C = c / T \in \{\tau, \tau + d\tau]] = \frac{(\lambda\tau)^c e^{-\lambda\tau}}{c!}$$

$$P[(C = c) \cap (T \in \{\tau, \tau + d\tau])] =$$

$$= \underbrace{P[C = c / T \in \{\tau, \tau + d\tau]]}_{\frac{(\lambda\tau)^c e^{-\lambda\tau}}{c!}} \cdot \underbrace{P\{T \in \{\tau, \tau + d\tau]]}_{f_T(\tau)\, d\tau}$$

Luego, $$P[C = c] = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \frac{(\lambda\tau)^c e^{-\lambda\tau}}{c!} \cdot \beta e^{-\beta\tau} d\tau$$

Portanto; $P\{q=c\} = \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{\beta (\lambda\tau)^c e^{-(\lambda+\beta)\tau}}{c!} d\tau$

$$= \frac{\beta\lambda^c}{c!} \int_{t=0}^{t=\infty} \tau^c e^{-(\lambda+\beta)\tau} d\tau \Bigg\} \Rightarrow$$

Cambio de variable $\rightsquigarrow$ $u = (\lambda+\beta)\tau$, $\tau = \frac{u}{\lambda+\beta}$ $\Bigg\} \rightarrow \Bigg\{ du = (\lambda+\beta) d\tau$, $d\tau = \frac{1}{\lambda+\beta} du$

$$P\{q=c\} = \frac{\beta\lambda^c}{c!} \frac{1}{(\lambda+\beta)^{c+1}} \underbrace{\int_{u=0}^{u=\infty} u^c e^{-u} du}_{\Gamma(c+1)}$$

$$= \frac{\beta\lambda^c}{(\lambda+\beta)^{c+1}} \frac{\Gamma(c+1)}{c!}$$

Para valores enteros no negativos de $c \rightarrow$ $\Gamma(c+1) = c!$

Luego: $P[q=c] = \frac{\beta}{\lambda+\beta}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\beta}\right)^c$

Definimos $\mu = \lambda/\beta$, $p = \frac{1}{\mu+1}$ $\Bigg\} \Rightarrow P\{q=c\} = \frac{1}{\mu+1}\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^c$

$$= p(1-p)^c$$

Luego:

$P_q(c) = p(1-p)^c$, $c = 0, 1, 2, \ldots$ $\Bigg\} \Rightarrow$ $q = \underbrace{G(p) - 1}_{\text{Geométrica trasladada}}$

$p = \frac{1}{\mu+1}$, $\mu = \lambda/\beta$

Portanto: $F_q(c) = 1 - (1-p)^{c+1}$

$m_c = 1/p - 1 = \mu = \lambda/\beta$

$\sigma_c^2 = (1-p)/p^2 = (\mu+1)\mu = \left(\frac{\lambda}{\beta}+1\right)\frac{\lambda}{\beta}$

Observaciones:

1) La media del tamaño de la cola es

$$m_c = \lambda/\beta = \lambda \cdot \underbrace{1/\beta}_{m_T}$$

frecuencia (coches/ud. de tiempo)

duración media de una interrupción

2) $N = P(\lambda T) \iff \delta T = Ex(\lambda)$

Nº de coches que lleguen en T

Intervalo de tiempo entre un coche y el siguiente

Luego si se realiza una simulación, hay dos opciones:

a) Conocido T, generar $N = P(\lambda T)$

b) Conocido T, generar $\delta T_1, \delta T_2, \delta T_3, \dots = Ex(\lambda)$

hasta que $\sum_{i=1}^{N} \delta T_i \leq T < \sum_{i=1}^{N+1} \delta T_i$

Simulación

La función rand( ) proporciona números pseudoaleatorios con distribución uniforme en $[0,1]$

Luego:

$$x = \text{rand}(\,) \Longrightarrow X = \mathcal{U}(0,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} f_X(x) = 1 \\ x \in [0,1] \end{cases}$$

Para obtener $Y = \mathcal{E}x(\alpha)$ utilizaremos una función tal que

$$y = g(x) \Longrightarrow Y = \mathcal{E}x(\alpha)$$

Para hallar $g(x)$ planteamos:

$$\left.\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{f_X(x)}{g'(x)}\Bigg|_{x=g^{-1}(y)} \\ f_X(x) &= 1 \quad \text{para} \quad x \in [0,1] \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f_Y(y) = \underbrace{\frac{1}{g'(x)}\Bigg|_{x=g^{-1}(y)}}_{\frac{d}{dy}\left(g^{-1}(y)\right)}$$

Luego $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy = g^{-1}(y)\Big|_{-\infty}^{y} = g^{-1}(y) - \underbrace{g^{-1}(-\infty)}_{0}$

$$\Longrightarrow g^{-1}(y) = F_Y(y) \Longleftrightarrow \boxed{g(x) = F_Y^{-1}(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{En nuestro caso} \quad \underbrace{F_Y(y)}_{x} = 1 - e^{-\alpha y} \\ &\text{luego} \quad F_Y^{-1}(x) = y, \quad y = -1/\alpha \ln(1-x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} &X = \mathcal{U}(0,1) \\ &Y = g(X), \ \text{con } g(x) = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Y = \mathcal{E}x(\alpha)$$