Regla de la cadena. Ejercicios.

1. Sean las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$x = f_1(u,v) = u + v; \quad y = f_2(u,v) = u \cdot v; \quad z = g(x,y) = x + 2y$$

Definimos la función compuesta $g\big(f_1(u,v), f_2(u,v)\big) = \phi(u,v)$. Se pide calcular su diferencial de dos maneras, comprobando que se obtiene el mismo resultado:

a) Utilizando la regla de la cadena.

b) Obteniendo la expresión de $\phi(u,v)$ y calculando su diferencial.

2. Sabemos que la composición de dos funciones diferenciables es diferenciable. Si una de ellas no es diferenciable, la función compuesta puede no serlo y la regla de la cadena puede no cumplirse, como se comprueba a continuación.

Sean las funciones $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera:

$$x = f_1(t) = 3t; \quad y = f_2(t) = t; \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que la función g no es diferenciable en el origen, pues no cumple la condición necesaria de diferenciabilidad.

b) Obtener la función $g\big(\vec{f}(t)\big) = \phi(t)$ y su derivada en $t = 0$ ($\phi'(0) = 3/5$).

c) Calcular $\phi'(0)$ por la regla de la cadena, comprobando que se obtiene un resultado distinto ($\phi'(0) = 0$).

d) Repetir los pasos anteriores con la función g siguiente (diferenciable en el origen), comprobando que se obtiene el mismo resultado por ambos métodos ($\phi'(0) = 0$).

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$