1.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la expresión:

$$f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7.$$

a) Calcular los extremos relativos de la función en todo su domino de definición.

b) Calcular máximo y mínimo absolutos de la función en el siguiente conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

<u>Solución:</u>

a) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6 = 0 \iff x = 3. \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 8 = 0 \iff y = 4, \end{array}\right\} \Longrightarrow P(3, 4) \ \text{ candidato a extremo relativo.}$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{H} \ \text{Def+} \Longrightarrow \text{P mínimo relativo.}$$

b) Calculemos ahora los extremos en la frontera de la región:

$$L(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 6 + 2x\lambda = 0 \iff \lambda = \dfrac{3 - x}{x}, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8 + 2y\lambda = 0 \iff \lambda = \dfrac{4 - y}{y}. \end{array}\right\} \Longrightarrow y(3-x) = x(4-y) \Longrightarrow 3y = 4x \Longrightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 1 \iff x^2\left(1 + \frac{16}{9}\right) = 1 \iff x^2 = \frac{9}{25} \iff x = \pm\frac{3}{5} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} P_1(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) & \Longrightarrow \lambda = 4, \\ \\ P_2(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) & \Longrightarrow \lambda = -6. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \ \text{Def+} \Longrightarrow P_1 \ \text{ Mínimo} \\ \\ \mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \ \text{Def-} \Longrightarrow P_2 \ \text{ Máximo} \end{array} \right.$$

Como la funciń es continua y diferenciable y no hay extremos relativos en el interior del conjunto, el mínimo y el máximo deben alcanzarse en la frontera, y por lo tanto se corresponden con los puntos P_1 y P_2, respectivamente.