1.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^k}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Estudiar para que valores del parámetro k la función es continua en el punto $(0,0)$.

b) Estudiar para que valores del parámetro k la función es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Solución:

a) Estudiemos la continuidad de la función para los valores de k pedidos:

- Para $k \leq \frac{3}{2}$ la función f no es continua en el $(0,0)$, ya que carece de límite en ese punto o este es distinto de cero. En efecto, según la dirección $y = x$, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2k}}{\sqrt{8}x^3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \lim_{x \to 0} x^{2k-3} = 0 \iff 2k-3 > 0 \iff k > \frac{3}{2},$$

  y, por lo tanto, la función no es continua.

- Para $k > \frac{3}{2}$ veamos que existe límite y que coincide con el valor de la función en el punto. Empleando las coordenadas polares:

$$f(x,y) = \frac{(\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta))^k}{\rho^3(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \rho^{2k-3}\cos^k(\theta)\sin^k(\theta).$$

  De la expresión anterior deducimos que

$$|f(x,y)-0| = \left|\rho^{2k-3}\cos^k(\theta)\sin^k(\theta)\right| < \rho^{2k-3}$$

  y como $\rho^{2k-3} \to 0$ cuando ρ tiende a 0, resulta entonces que existe el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y vale 0.

b) Comencemos calculando el valor de las derivadas parciales en el $(0,0)$. Se tendrá que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t,0)}{t} = 0.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(0,t)}{t} = 0.$

Estudiemos ahora la condición de diferenciabilidad:

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2}} \frac{f\left((0,0)+(h_1,h_2)\right)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$= \lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2}} \frac{\frac{h_1^k h_2^k}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2}} \frac{h_1^k h_2^k}{(h_1^2+h_2^2)^2} = (*)$$

Pasando ahora de nuevo a coordenadas polares obtenemos

$$\left|\frac{\rho^{2k}\cos^k(\theta)\sin^k(\theta)}{\rho^4}-0\right| \leq \rho^{2k-4}$$

La anterior expresión tenderá a cero, y por lo tanto la función será diferenciable, para valores de $k>2$.