Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones y, de ser posible, proporcionar un contraejemplo.

4.1.– Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definida en un intervalo I . Si existe $\phi(x)$ verificando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(x) - f_n(x)| = 0 \quad \forall x \in I,$$

entonces existe convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a ϕ en I .

FALSO:

La expresión dada es precisamente la definición de convergencia puntual de una sucesión de funciones, lo cual no implica convergencia uniforme. Contraejemplo:

$$f_n(x) = \frac{1 - nx^3}{1 + nx^3} \text{ (continuas)} \mapsto^{\text{C.P.}} \mapsto \phi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ -1, & x \neq 0, \end{cases} \text{ (no continua)} \implies \text{(no C.U.)}$$

4.2.– Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definida en un intervalo I . Si $\phi(x)$ es una función no continua, entonces no puede existir convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a ϕ en I .

FALSO:

El enunciado sería cierto si los elementos de la sucesión funcional fuesen funciones continuas. Contraejemplo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \in [1, 2], \end{cases} \text{ (constante)} \mapsto^{\text{C.U.}} \mapsto \phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \in [1, 2], \end{cases}$$

4.3.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definida en I . Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente convergente en I .

FALSO:

El resultado sería cierto si quien tiene como mayorante a una STP convergente es $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. (teorema de Weierstrass). Contraejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -(nx)^n \quad \text{definida en } I=[0,1]$$

4.4.- Sea $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias convergente con radio de convergencia r .

Si dicha serie de potencias converge para $x = r$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = S(r) = \lim_{x \rightarrow r} S(x)$.

CIERTO:

Consecuencia del segundo teorema de Abel.