2.– Se quiere construir una caja abierta (sin tapa). El material de las paredes cuesta un euro el cm^2, siendo el coste de la base un 50 % más caro. ¿Cuál es la caja de mayor volumen que puede fabricarse por 18 euros?

Llamemos x, y y z a las dimensiones de la caja. El volumen de la misma vendrá dado por la expresión $V(x,y,z) = xyz$, mientras que la restricción viene dada por el coste de fabricación de la misma, esto es: $18 = \frac{3}{2}xy + 2xz + 2yz$,

Construimos por lo tanto:

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda(3xy + 4xz + 4yz - 36),$$

y obtenemos los candidatos a extremo relativo:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial L}{\partial x} &= yz + \lambda(3y+4z), \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} &= xz + \lambda(3x+4z), \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial z} &= xy + \lambda(4x+4y), \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} &\lambda = \frac{-yz}{3y+4z}, \\ &\lambda = \frac{-xz}{3x+4z}, \\ &\lambda = \frac{-xy}{4x+4y}, \\ &3xy + 4xz + 4yz = 36 \end{aligned}\right\}$$

Igualando las expresiones de la primera y segunda ecuaciones obtenemos:

$$-yz(3x+4z) = -xz(3y+4z) \iff \cancel{3xyz} + 4yz^2 = \cancel{3xyz} + 4xz^2 \iff \begin{cases} \cancel{z=0}, \\ x = y. \end{cases}$$

De modo similar obtenemos:

$$-yz(4x+4y) = -xy(3y+4z) \iff \cancel{4xyz} + 4y^2z = \cancel{4xyz} + 3xy^2 \iff \begin{cases} \cancel{y=0}, \\ x = \frac{4}{3}z. \end{cases}$$

Tendremos por lo tanto una caja de dimensiones $(\frac{4}{3}z, \frac{4}{3}z, z)$, y el valor de z sale de sustituir en la ecuación de la restricción:

$$3 \cdot \frac{4}{3}z \cdot \frac{4}{3}z + 4 \cdot \frac{4}{3}z \cdot z + 4 \cdot \frac{4}{3}z \cdot z = 36 \Longrightarrow 16z^2 = 36 \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{x = -\frac{3}{2}}, \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, nuestro candidato es el punto $P(2, 2, \frac{3}{2})$, y el valor del multiplicador:

$$\lambda = \frac{-xy}{4x+4y} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

Para verificar que nuestro candidato es un máximo, calculemos la Hessiana. Para ello:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = z + 3\lambda = z - \frac{3}{4}, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = y + 4\lambda = y - 1, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x + 4\lambda = x - 1.$$

Por lo tanto: $H_{|P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Esta matriz no es definida, lo que no nos permite todavía ninguna conclusión. Observemos ahora:

$$\begin{aligned} d^2L &= \frac{3}{2}dxdy + 2dydz + 2dxdz, \\ 0 &= dg = (3y + 4z)dx + (3x + 4z)dy + (4x + 4y)dz \Longrightarrow^{dg_{|P}} \\ &\Longrightarrow 12dx + 12dy + 16dz = 0 \Longrightarrow dz = -\frac{3}{4}(dx + dy). \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} d^2L &= \frac{3}{2}dxdy + 2dydz + 2dxdz = \frac{3}{2}dxdy + 2dx\left(-\frac{3}{4}(dx + dy)\right) + 2dy\left(-\frac{3}{4}(dx + dy)\right) \\ &= \frac{3}{2}dxdy - \frac{3}{2}(dx^2 + dxdy) - \frac{3}{2}(dxdy + dy^2) = -\frac{3}{2}(dx^2 + dy^2) - \frac{3}{2}dxdy = (*) \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que:

$$0 \leq \frac{1}{2}(dx \pm dy)^2 = \frac{dx^2}{2} + \frac{dy^2}{2} \pm dxdy \Longrightarrow |dxdy| \leq \frac{1}{2}\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Aplicando esta desigualdad a nuestra expresión $(*)$, obtenemos:

$$(*) \leq -\frac{3}{2}(dx^2 + dy^2) + \frac{3}{2}\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2) = -\frac{3}{4}(dx^2 + dy^2).$$

Por último, podemos asegurar que dx y dy no se pueden anular simultáneamente, pues la condición $dz = -\frac{3}{4}(dx + dy)$ implicaría que (dx, dy, dz) equivaldría al vector (0,0,0), por lo tanto tenemos que:

$$d^2L < 0 \quad \forall(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0),$$

por lo que tenemos en $P\left(2, 2, \frac{3}{2}\right)$ un máximo relativo.