

Cálculo Infinitesimal II

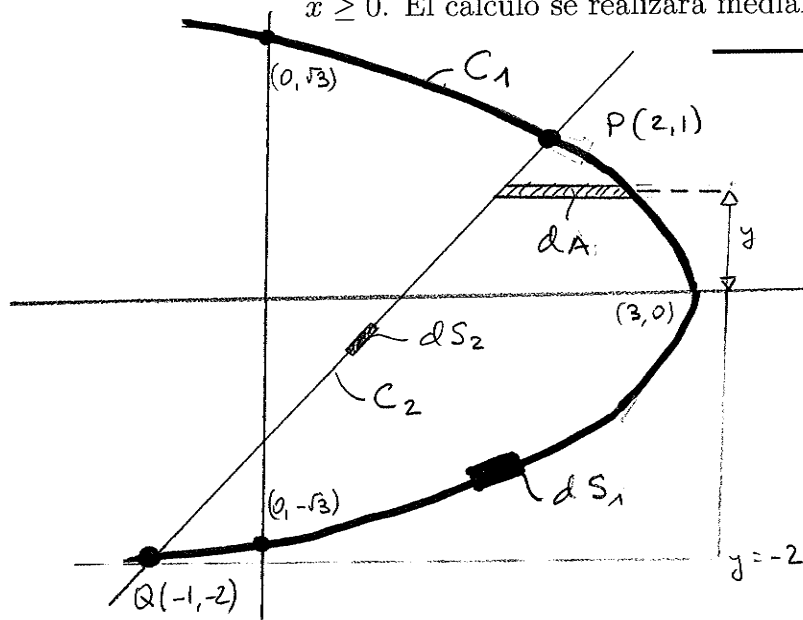
Integración

Ejercicio 5

(Curso 2014-2015)

1.- En el plano XY se considera el recinto D limitado por las curvas $C_1 : x + y^2 - 3 = 0$ y $C_2 : x - y - 1 = 0$. Se pide:

- Dibujar el recinto D y calcular la longitud de su contorno.
- Obtener el volumen generado por D al girar entorno al eje $y = -2$.
- Calcular el área de la superficie que genera C_1 al girar entorno al eje OX para $x \geq 0$. El cálculo se realizará mediante integración simple en el eje y .



• C_1 : parabola: $x_p = 3 - y^2$

Corte con ejes: $x=0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$
 $y=0 \Rightarrow x=3$

• C_2 recta $y = x - 1$ o $x_r = y + 1$

• $\textcircled{A}$ $3 - y^2 = y + 1 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\{ \begin{array}{l} P(2, 1) \\ Q(-1, -2) \end{array} \right.$

• Radio giro apdo b) $r = y - (-2) = y + 2$

a) Longitud del contorno: S_1 : parabola, S_2 : recta. $S = S_1 + S_2$

• $S_1 = \int_{-2}^1 dS_1 = \int_{-2}^1 \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_{-2}^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy$

$\int \sqrt{1 + 4y^2} dy$: Cambio $2y = \sinh t \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \sinh t \\ dy = \frac{1}{2} \cosh t dt \end{cases}$

$I = \frac{1}{2} \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{4} \int (\cosh 2t + 1) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{\sinh 2t}{2} + t \right) = \frac{1}{4} (\sinh t \cosh t + t)$

$\Rightarrow \int_{-2}^1 dS_1 = \frac{1}{4} \left(2y \sqrt{1 + 4y^2} + \operatorname{arsh} 2y \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{4} [2\sqrt{5} + 4\sqrt{17} + \operatorname{arsh} 1 + \operatorname{arsh} 4]$

• $S_2 = \int_{-1}^2 dS_2 = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2} x \Big|_{-1}^2 = 3\sqrt{2}$ $S = S_1 + S_2 \approx 10.3674$

b) Volumen: $dV = 2\pi(y+2)dA = 2\pi(y+2)(3-y^2-y-1)dy = 2\pi(4-3y^2-y^3)dy$

$V = \int_{-2}^1 dV = 2\pi \left(4y - y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27\pi}{2} u^3$

c) Área $dA = 2\pi y dS_1 = 2\pi y \sqrt{1 + 4y^2} dy$

$A = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi y \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{\pi}{4} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{\pi}{4} (1 + 4y^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} (13\sqrt{3} - 1) u^2$