1.– Estudia el carácter de las siguientes series de términos positivos:

1) $\sum \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

2) $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^e}$, $n > 1$

3) $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

4) $\sum \dfrac{1}{n!}$

5) $\sum \dfrac{n}{2n-1}$

6) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

7) $\sum \dfrac{3^n n!}{n^n}$

8) $\sum \dfrac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

9) $\sum \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n > 1$

10) $\sum \dfrac{1}{2^{\ln n}}$

2.– Estudia el carácter de las siguientes series de términos positivos:

1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{13}+\dots$

2) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{6^6}+\dots$

3) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\cdot 5}{2^3+2}+\dfrac{3\cdot 5^2}{3^4+3}+\dots$

4) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dots$

3.– Estudia la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

1) $\sum (-1)^n \dfrac{n!}{n^n}$

2) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$

3) $\sum \dfrac{\operatorname{sen} n}{n^2}$

4) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

5) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dots$

6) $1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}-\dfrac{1}{6^2}+\dots$

4.– Demuestra que, si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, serán convergentes necesariamente las series:

a) $\sum {a_n}^2$ **b)** $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$

5.– Demuestra:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left[(1+n)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n \ln\left[(n+1)^{n+1}\right]} = \frac{1}{2\ln 2}$$

6.– Estudia el carácter y calcula la suma, si convergen: $\left(\text{Dato: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ **2)** $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ **4)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n}, \ x \in \mathbb{R}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 4}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 + 5n^2 + 8n + 4}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$ **10)** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n}{n-1} - \frac{n+1}{n}\right)^{-n}$

7.– Teniendo en cuenta el dato del ejercicio **6**, calcula la suma de:

1) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$ **2)** $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

3) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ **4)** $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$

8.– Suma las series:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{(2n-1)(n+1)n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$ **4)** $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

9.– Estudia el carácter de las series siguientes, según los valores de a y b.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^n a}{(bn)^2}, \ a \in [0, \pi], b \neq 0;$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^a}{3^b \cdot 6^b \dots (3n)^b};$ **3)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$

10.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión de reales positivos y $\{A_n\}$ su sucesión de sumas parciales. Se pide:

a) Demostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}}$ converge y calcular su suma.

b) A partir de **a)** y del valor de la suma de los n primeros naturales, calcular $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

11.– Suma la serie en la que cada término es P veces la suma de los siguientes, siendo $P > 0$.

12.– Sea un cuadrado C_0 de lado $l_0 = 1$. Inscribimos en C_0 un cuadrado C_1, de lado l_1, uniendo los puntos medios de cada lado de C_0. A continuación inscribimos en C_1, por el mismo método, un segundo cuadrado C_2 y así sucesivamente…
Si A_i y P_i designan respectivamente el área y el perímetro de cada cuadrado C_i, se pide:

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i;$ **2)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i$
