1.– Determina los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\ln(y-x^2)$ **b)** $h(t,z)=\dfrac{tz}{(t+1)^2+(z-2)^2}$

c) $r(u,v)=\dfrac{\sqrt{u^2+v^2-4}}{u^2+v^2}$ **d)** $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x}}$

2.– Efectúa la composición de los siguientes pares de funciones:

a) $\mathbf{f}(x,y)=\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}\,,\,x+y\right)$ con $g(x,y)=\sqrt{x-y+3}$

b) $\mathbf{r}(t)=(\operatorname{sen} t,\,\cos t,\,\tan t)$ con $g(u,v,w)=\dfrac{u^2}{v^2}-w^2$

c) $\mathbf{h}(u,v)=\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} u},\,\dfrac{1}{\operatorname{sen} v}\right)$ con $s(x,y)=\ln x-\ln y$

3.– Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $h(r,s,t)=e^{rst}$ **b)** $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$

c) $g(x,y)=|x|$ **d)** $h(x,y,z)=x^{yz}+\tan\left(\dfrac{y^2}{z}\right)$

e) $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2$ **f)** $g(u,v)=\ln\sqrt{\cos(u-v^2)}$

g) $f(x,y)=\tan\dfrac{1}{x\sqrt{y}}$ **h)** $g(u,v)=\operatorname{sen}(u\cos v)$

i) $f(x,y)=\ln\arctan\dfrac{x}{y}$ **j)** $g(u,v)=\dfrac{1}{1+\dfrac{v}{u-v}}$

4.– Sean las funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ **b)** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(1-x^3)+y^2(1+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ **d)** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$

Estudia su continuidad, existencia de derivadas direccionales y parciales y diferenciabilidad.

5.– Calcula las derivadas direccionales de las siguientes funciones, en el punto P y según la dirección del vector $\mathbf{v}$.

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\,e^{x+y}$ $P(1,1)$ $\mathbf{v}=(1,2)$

b) $f(x,y)=\operatorname{sen}\dfrac{x+y}{x-y}$ $P(-2,2)$ $\mathbf{v}=(1,1)$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $P(1,0,1)$ $\mathbf{v}=(1,1,1)$

d) $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ $P(1,1,0)$ $\mathbf{v}=(0,3,4)$

6.– Sea $f(x, y)$ una función real de variable vectorial, diferenciable en el punto $P \in \mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, -1)$. Según las direcciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, las derivadas de la función f en P valen respectivamente $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y 2. Calcula las derivadas direccionales de f en P respecto a la dirección dada por $\mathbf{w}$.

7.– Dada la función $f(x, y, z) = (x + y)^2 + z^2 - xy + 2z$, se pide:

a) Partiendo del punto $P(-1, 2, 3)$, determinar en qué dirección varía más rápidamente la función y cual es el valor de esa variación.

b) Calcular la derivada direccional de esta función en el origen, a lo largo de la recta que forma un ángulo de $60°$ con el eje OZ y está contenida en el plano $x = 0$.

8.– Calcula du en las funciones siguientes:

$$\textbf{a)}\ u(x, y) = x^2 + e^{\frac{y}{x}} \qquad\qquad \textbf{b)}\ u(x, y, z) = \ln \frac{x^3 y^2}{2z^2}$$

9.– Calcula d^2u en las funciones siguientes, particularizando su valor en los puntos indicados:

$$\textbf{a)}\ u(x, y) = \frac{\tan x}{2 + y^2}, \quad P(0, 1) \qquad\qquad \textbf{b)}\ u(x, y) = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 - 1}, \quad P(\sqrt{2}, 1)$$

10.– Calcula:

a) $\dfrac{du}{dt}$, siendo : $u = xy + xz + yz;\quad x = t;\quad y = \cos 2t;\quad z = \operatorname{sen} t$

b) $\dfrac{dz}{dt}$, siendo : $z = x + y;\quad x = 4t^2 - 1;\quad y = \ln t$

c) $\dfrac{dz}{dt}$, siendo : $z = e^{xy^2};\quad x = \cos t;\quad y = \operatorname{sen} t$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$, siendo : $z = f(x, y)$, diferenciable; $\quad x = uv;\quad y = \dfrac{u}{v}$

e) $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial s}$, siendo : $u = f(x, y, z) = z^2 - x^2y + yz^3;\quad x = s\cos t;\quad y = s \operatorname{sen} t;\quad z = t$

11.– Estudia la diferenciabilidad y escribir la matriz jacobiana de las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial en todo punto y, en particular, en los que se indican.

$$\begin{array}{lll}
\textbf{a)}\ \mathbf{h}(x, y) = (e^{x+y}, \ln x) & \text{en} & (1, 0) \\
\textbf{b)}\ \mathbf{w}(u, v) = (\operatorname{sen} u, \cos uv) & \text{en} & (\pi, \pi/2) \\
\textbf{c)}\ \mathbf{F}(x, y, z) = (xyz, x^2z) & \text{en} & (2, -1, -1)
\end{array}$$

12.– Dada la función: $f(x, y) = e^{x^2}y$, calcula el incremento Δf de la función para

$$x = 0.5;\ y = 1.2;\quad \Delta x = 0.02,\ \Delta y = -0.03$$

Compara el valor hallado con el de df, tomando como diferenciales de las variables los incrementos $\Delta x, \Delta y$ de las mismas.

13.– Demuestra que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores. Aplícalo al cálculo del área de un rectángulo de lados $a = 20\, cm$ y $b = 25\, cm$, si el error cometido en el cálculo de a es de $8\, mm$ y en el de b de $-6\, mm$.

14.– Un lado de un rectángulo, de longitud $20\,m$, aumenta dicha longitud con una velocidad de $5\,m/s$, mientras que el otro lado, de longitud $30\,m$, la disminuye a razón de $4\,m/s$. ¿A qué velocidad varían el perímetro y el área?

15.– Demuestra que la función $z = f(x^2 + y^2)$, siendo f diferenciable, satisface la ecuación

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

16.– Comprueba que, si $u(x, y, z) = f(xyz)$, se verifica

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(xyz)$$

y halla la función F.

17.– Demuestra que la función $z = \operatorname{arc\,tg}(\frac{y}{x})$ satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

18.– Prueba que la función $z = -x^2y + f(xy) + g(x)$, donde f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ suficientemente diferenciables, satisface la relación:

$$y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

19.– Aproxima las siguientes funciones en un entorno del punto P, mediante un polinomio de segundo grado, utilizando la fórmula de Taylor.

a) $f(x, y) = \operatorname{sen} xy + \cos xy$ $\quad P(0, 0)$

b) $z(r, t) = \operatorname{sen}(r^2 + t^2)$ $\quad P(0, 0)$

c) $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ $\quad P(1, 1, 1)$
