1.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes sucesiones funcionales:

a) $f_n(x) = \dfrac{1-nx^3}{1+nx^3},\ x \in [0,1]$ **b)** $f_n(x) = e^{-n(x-\sqrt{x})^2},\ x \in [0,1]$

c) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$ **d)** $f_n(x) = \dfrac{x}{e^{2n^2x^2}},\ x \in \mathbb{R}$

2.– Estudia la convergencia uniforme y puntual de las siguientes series funcionales:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+nx^2)}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\cos(nx) - \operatorname{sen}(nx))$; **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n}$

3.– Se considera la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$, definida en $[1,\infty)$. Se pide estudiar su convergencia uniforme y obtener su función suma.

4.– Calcula el campo de convergencia y la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\,x^n$.

5.– Se considera la serie de potencias $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$. Se pide:

a) Calcular su campo de convergencia.

b) Obtener su función suma $f(x)$.

c) A partir de los resultados anteriores, calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)\,2^{4n-1}}$.

6.– Se considera la serie de potencias $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,x^{4n-1}}{4n}$. Se pide:

a) Calcular su campo de convergencia.

b) Obtener su función suma $f(x)$.

c) A partir de los resultados anteriores, sumar la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n)}$.

7.– Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right),\ \ |x| < 1$

a) Obtén su desarrollo de Taylor en torno a $x = 0$ a partir del desarrollo de $\ln(1+t)$.

b) Calcula el radio de convergencia del desarrollo en serie de $f(x)$ mediante el criterio de Cauchy-Hadamard. Define el conjunto de valores de x para los que la serie converge.

8.– Estudia la convergencia de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2n)}{2^n}$ y, en su caso, calcula su suma.

9.– Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x^3}{(1+x)^3}$, se pide calcular su desarrollo en serie de MacLaurin, a partir del desarrollo de $\dfrac{1}{1+x}$, determinando su radio y campo de convergencia.

10.– Calcula el desarrollo de Mac Laurin de orden 6 de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ de tres maneras:

a) Aplicando la fórmula de Taylor a $f(x)$.

b) Utilizando el desarrollo del $\operatorname{sen} x$.

c) Utilizando el desarrollo de la función $\cos 2x$.

11.– Halla el valor de a para que el siguiente infinitésimo (cuando $x \to 0$) tenga el mayor orden posible y obtén su desarrollo limitado de orden 5.

$$f(x) = \frac{x + ax^3}{1+x^2} - \operatorname{sen} x$$

12.– Calcula los siguientes límites empleando desarrollos limitados de Taylor:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x\cosh x + 3\operatorname{senh} x - 4x}{x^3}; \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

13.– Sea la ecuación $F(x,y) = y + \ln y - \operatorname{sen} x - 1 = 0$, que define a y como función implícita –diferenciable– de x, en un entorno de $x = 0$. Utilizando el desarrollo limitado de $y(x)$, se pide calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - 2\,y'\right)}{x - 2\,(y-1)}$$
