1.– Estudia el carácter de las siguientes series de términos positivos:

1) $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}}$ **2)** $\sum n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

3) $\sum \dfrac{na^n}{(n+1)!}$, $a \in \mathbb{R}^+$ **4)** $\sum \left(\tan \dfrac{1}{n} - \operatorname{sen} \dfrac{1}{n} \right)$

5) $\sum \dfrac{1}{2n!}$ **6)** $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$

7) $\sum \dfrac{n^n}{n!\,5^n}$ **8)** $\sum \left(\dfrac{e}{e+1} \right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

9) $\sum \dfrac{n^\beta}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n > 1$ **10)** $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$, $n > 1$

2.– Estudia el carácter de las siguientes series de términos positivos:

1) $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2^2+1}{2 \cdot 5^2} + \dfrac{3^2+1}{3 \cdot 5^3} + \dots$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$

3) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{13} + \dots$ **4)** $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^5} + \dfrac{1}{5^6} + \dots$

3.– Estudia la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:

1) $\sum (-1)^n \dfrac{n+1}{n!}$ **2)** $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

3) $\sum \dfrac{\cos \sqrt{n}}{n^{3/2}}$ **4)** $\sum \dfrac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$

5) $\dfrac{1}{2\ln 2} - \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} - \dfrac{1}{5\ln 5} + \dots$ **6)** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10} + \dots$

4.– Demuestra que, si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, serán convergentes necesariamente las series:

$$\sum {a_n}^2 \qquad \sum \frac{a_n}{1+a_n}$$

5.– Suma la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(nx^{\frac{1}{n}} - (n+1)x^{\frac{1}{n+1}} + 1 \right), \; x > 0$$

6.– Estudia el carácter de estas series, calculando su suma, si convergen $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{4^n}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n^n}\right)$ **4)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)} \frac{1}{3^n}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{n(n+1)2^{n+1}}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$ **10)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

7.– Teniendo en cuenta el dato del ejercicio **6**, calcula la suma de:

1) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \dots$ **2)** $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$

3) $\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$ **4)** $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$

8.– Suma las siguientes series:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{n!}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{(n+1)!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$ **4)** $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

9.– Calcula:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n+3)} \qquad B = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-j)(n+2)}{(n+1)n^2}$$

10.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y $\{A_n\}$ la sucesión de sumas parciales $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Se pide :

a) Demostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}}$ es convergente y calcular su suma.

b) Calcular $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nH_n^2 - H_n}$, siendo $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

11.– Dada la serie de término general $a_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$, determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que converge y obtén la suma de la serie.

12.– Se considera un círculo C_0 de radio $r_0 = 1$. Se inscribe en él un cuadrado, en éste un círculo C_1, en él un cuadrado, en el cuadrado un círculo C_2 y así sucesivamente. Se pide calcular el límite de la suma de las áreas y el de los perímetros de los círculos inscritos.
