1.– Determina los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \sqrt{x-(y-1)^2-1}$ **b)** $g(u,v) = \dfrac{u+v}{\sqrt{2u-v}}$

c) $r(t,s) = \dfrac{\ln(t^2+s^4)}{\operatorname{sen}(ts)}$ **d)** $h(x,y) = \ln(xy+1)$

2.– Efectúa la composición de los siguientes pares de funciones:

a) $\mathbf{f}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ con $\mathbf{g}(x,y) = (y^2+x^2, y^2-x^2)$

b) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+z, y-x)$ con $h(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$

c) $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ con $g(u,v,w) = u^2+v^2+w^2$

3.– Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^3+y^3-3axy$ **b)** $g(u,v) = e^{\frac{\operatorname{sen} v}{u}}$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **d)** $g(u,v) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} u + 1}{\sqrt{v}}\right)$

e) $f(x,y) = x^{y^2}$ **f)** $g(u,v) = \operatorname{sen}\dfrac{u^2}{v}$

g) $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}}$ **h)** $g(u,v) = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{uv}$

i) $f(x,y) = \ln\cos(x+2y)$ **j)** $g(u,v) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} u \cos v)$

4.– Dadas las funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+1)+y^2(y^2+1)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ **d)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^4 = 0 \end{cases}$

Estudia su continuidad, existencia de derivadas direccionales y parciales y diferenciabilidad.

5.– Calcula las derivadas direccionales de las siguientes funciones, en el punto P y según la dirección del vector $\mathbf{v}$.

a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ $P(1,1)$ $\mathbf{v} = (2,1)$

b) $f(x,y) = xy^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$ $P(2,1)$ $\mathbf{v} = (1,1)$

c) $f(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ $P(\ln 3, \pi/2, 1)$ $\mathbf{v} = (1,1,2)$

d) $f(x,y,z) = x^2-y^2+xyz^2$ $P(1,1,0)$ $\mathbf{v} = (1,-1,2)$

6.– Sean los puntos $P(1,-1), Q(2,-1), R(1,0), S(0,2)$. La función real de variable vectorial $f(x,y)$, diferenciable en P, tiene en este punto unas derivadas direccionales de valor 3 según la dirección del vector $\overline{PQ}$ y de valor 1 según la dirección del vector $\overline{PR}$. Calcula la derivada direccional de f en P según la dirección del vector $\overline{PS}$.

7.– La temperatura en cada punto de una placa metálica viene dada por la función:

$$t(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x$$

a) ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en el punto (0,0) y cual es el valor de este aumento?

b) ¿En qué dirección disminuye más rápidamente la temperatura en el punto (0,0)?

8.– Calcula du en las funciones siguientes:

a) $u(x,y) = \ln xy + \sqrt{x^2+y^2-1}$ **b)** $u(x,y,z) = z^{y^x}$

9.– Calcula d^2u en las funciones siguientes, particularizando su valor en los puntos indicados:

a) $u(x,y) = e^{ax}\cos y, \quad P\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $u(x,y) = y^2\sqrt{x^2+1}, \quad P(\sqrt{3}, -1)$

10.– Calcula las derivadas siguientes, particularizando para los valores indicados de las variables. En el caso **c)** se supone derivable la función f:

a) $\dfrac{du}{dt}$ siendo $u = 3x + y;\ x = t^2 + 1;\ y = \operatorname{sen} t$. Particulariza en $t = 0$.

b) $\dfrac{dz}{dt}$ siendo $z = \sqrt{x^2+y^2};\ x = e^t;\ y = \ln t$. Particulariza en $t = 1$.

c) $\dfrac{du}{dt}$ siendo $u = x^2 + y^2 + z^2;\ x = f(t);\ y = t\,f(t);\ z = f(t^2)$. Particulariza $f(v) = \sqrt{v}$.

d) $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$ siendo $z = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right);\ x = r\cos t;\ y = r\operatorname{sen} t$. Particulariza en $r = t = 1$.

e) $\dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial s}$ siendo $v = xyz + \cos z;\ x = t + s;\ y = t - s;\ z = t^2 - s^2$. Particulariza en $t = 1, s = 0$.

11.– Estudia la diferenciabilidad y escribe la matriz jacobiana de las siguientes funciones vectoriales de variable vectorial en todo punto y, en particular, en los que se indican.

a) $\mathbf{f}(x,y) = (x^2, y^2, e^{xy})$ en $(1,1)$

b) $\mathbf{g}(x,y) = (xy, \operatorname{sen} x, x^2y)$ en $(\pi, \pi/2)$

c) $\mathbf{r}(u,v) = (u+v, u^2v^3)$ en $(4,1)$

12.– Los lados de un rectángulo, a y b, miden respectivamente 10 y 24 cm. ¿Cómo variará la diagonal del rectángulo si a se alarga 4 mm y b se acorta 1 mm? Calcula el valor aproximado de esta variación y compáralo con el valor exacto.

13.– Demuestra que el error relativo de un producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores. Aplícalo al cálculo del área del rectángulo del ejercicio anterior.

14.– Sea un prisma recto de base cuadrada de lado l y altura h. Sus dimensiones son variables, de modo que l aumenta con una velocidad de 5 m/s y h disminuye a razón de 4 m/s, ¿A qué velocidad varían el volumen y la superficie del prisma en el instante en que $l = 20$ m y $h = 30$ m?

15.– Demuestra que, si $z = f(x + ay)$, siendo f diferenciable y $a \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}$$

16.– Sea la función $z = yf(x^2 - y^2)$, con f diferenciable. Demuestra que se verifica:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

17.– Sea $z = z(u, v)$ con $u = x + y$, $v = x - y$. Prueba que se verifica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

18.– Sea $z = f(x + ay) - g(x - ay)$, donde f y g son funciones derivables de una variable y a es una constante. Demuestra que se verifica:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2(f''(x + ay) - g''(x - ay))$$

19.– Aproxima las siguientes funciones en un entorno del punto P mediante un polinomio de segundo grado utilizando la fórmula de Taylor.

a) $h(x, y, z) = e^{x+y+z}$ $\qquad P(0, 0, 0)$

b) $r(u, v) = \cos u \cos v$ $\qquad P(0, 0)$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + xy}$ $\qquad P(1, 0)$
