CÁLCULO INFINITESIMAL 2

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE EXAMEN

(cursos 2010/11 a 2022/23)

Jaime Fe Marqués
ETSI Caminos - A Coruña

Índice

1. Cuestiones de examen

Curso 10/11

1.– Razónese la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) La función Parte Entera de x no es continua en $I = [0, 4]$, luego no es integrable en I.

b) Toda función continua en un intervalo I, tiene primitiva en dicho intervalo. (*junio 2011*)

2.– Sea el intervalo $I = [0, \pi]$. Sea la función $f(t) = \operatorname{sen} t$, definida en I. Se pide:

a) Obtener la función integral de f, comprobando que se verifica el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

b) A partir del apartado **a)**, calcular las áreas S_1 y S_2 determinadas por la función f, el eje OX y las rectas $x = \pi/6$ y $x = \pi/3$ respectivamente. (*julio 2011*)

Curso 11/12

3.– Coméntese la siguiente afirmación: "Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra, si el grado de un polinomio es impar, existe al menos una raiz real; si es par, existen al menos dos raíces complejas (no reales) conjugadas". (*junio 2012*)

4.– Sea un cilindro recto de altura h y base circular de radio r. Aplicando el concepto de diferencial de una función, obténgase el incremento aproximado que sufre el volumen de un cilindro de dimensiones $r = 1\,m$, $h = 2\,m$, si los incrementos de r y h son $\Delta r = 0.01\,m$, $\Delta h = 0.02\,m$ respectivamente. (*julio 2012*)

5.– A partir de lo estudiado para las series de potencias de la forma $\sum a_n x^n$, razónese cómo se obtendrían el radio y el campo de convergencia de las series $\sum a_n (x - b)^n$. (*julio 2012*)

Curso 12/13

6.– Sea la función f de dos variables, diferenciable.

a) Escribe la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$ y la expresión de la diferencial de la función en el mismo punto.

b) ¿Qué relación hay entre la diferencial de f en P y el incremento de f respecto a su valor en P?

c) ¿Qué relación hay entre el plano tangente y la diferencial? (*junio 2013*)

7.– Como aplicación de lo visto en series de potencias y números complejos, se pide:

a) Escribir la expresión del desarrollo en serie de la función e^x (no es preciso deducirla).

b) Hacer $x = \theta i$ y obtener los 6 primeros términos de la serie.

c) Obtener, a partir del apartado b), la fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ (*junio 2013*)

8.– Una pieza metálica cilíndrica sufre un aumento de longitud de $1\,cm/seg$, manteniendo constante su volumen de $400\pi\,cm^3$. Se pide obtener:

a) La relación entre las velocidades a las que varían el radio r de la base y la longitud l.

b) La velocidad a la que varía r cuando la longitud de la pieza es de $100\,cm$ (*julio 2013*)

Curso 13/14

9.– Sea $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$. Utilizando el método habitual para extremos en varias variables, obtendríamos que f posee un mínimo absoluto en el punto $P(1,2)$.
Sea ahora la condición de ligadura $g(x,y) = x + y - 1 = 0$. Aplicando el método de Lagrange, concluiríamos que posee un mínimo condicionado en $Q(0,1)$, donde z alcanza el valor 2.
Se pide resolver ambos problemas mediante consideraciones geométricas, sin utilizar los métodos de cálculo de extremos. (*junio 2014*)

10.– Sea la serie funcional $\sum (x^2+1)^n$. Se pide determinar su campo de convergencia utilizando el método seguido en el Teorema de Cauchy-Hadamard. (*junio 2014*)

11.– Halla el lugar geométrico de los complejos $z = x + yi$ tales que los afijos de z y su inverso estén en la misma recta vertical. (*junio 2014*)

12.– Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, sabemos que, si $\sum b_n$ converge y es mayorante de $\sum a_n$, ésta también converge. A partir de la propiedad anterior y de la definición de límite, se pide demostrar que, si el cociente a_n/b_n tiende a cero y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ también lo hace (*julio 2014*)

13.– Al estudiar los extremos relativos de una función f de varias variables, si en el punto crítico $\vec{x} = \vec{a}$ la $d^2 f$ es semidefinida, se trata de un caso dudoso, es decir que puede haber extremo o no haberlo. Pero podemos asegurar que, si $d^2 f$ es semidefinida positiva, en $\vec{x} = \vec{a}$ no existe máximo y si es semidefinida negativa, no existe mínimo. Razónese la primera afirmación. (*julio 2014*)

Curso 14/15

14.– Sea $P_5(z)$ un polinomio de coeficientes reales y grado 5. Razona qué podemos afirmar del número y tipo de sus raices. (*junio 2015*)

15.– Dada la función de 2 variables $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, obtén su gradiente $\vec{\nabla} f$ en $P(2,1)$, así como la ecuación de la curva de nivel que pasa por P. ¿Qué relación hay entre $\vec{\nabla} f$ y la curva en P? (*junio 2015*)

16.– Dado el infinitésimo a_n, razónese qué podemos afirmar del carácter de las series siguientes: (*julio 2015*)

$$\textbf{a)}\ \sum a_n, \quad \textbf{b)}\ \sum a_n^2, \quad \textbf{c)}\ \sum \frac{1}{a_n}, \quad \textbf{d)}\ \sum \left| \frac{1}{a_n} \right|$$

17.– Sea $z = \rho e^{\theta i}$. Escribe la expresión de e^z. ¿Cuántas soluciones existen y porqué? Particulariza para el caso $\rho = 2$, $\theta = \pi/4$. (*julio 2015*)

Curso 15/16

18.– Supongamos una sucesión $\{a_n\}$ convergente. ¿Es $\sum a_n$ una serie convergente? Justifica la respuesta. (*junio 2016*)

19.– En el intervalo $I = [1,2]$ se define $f_n(x) = \left(n^2 x\right)^{-1}$. Se pide estudiar la convergencia uniforme de la sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ y de la serie funcional $\sum f_n(x)$. (*junio 2016*)

20.– Sean los complejos no nulos $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$. Se pide obtener la condición necesaria y suficiente para que sea real el cociente z_1/z_2. (*junio 2016*).

21.– Define convergencia y divergencia absoluta; y convergencia y divergencia incondicional. Demuestra que una serie incondicionalmente divergente es absolutamente divergente. Pon un ejemplo de serie absolutamente divergente que converja, justificando ambas características. ¿De qué tipo será la convergencia? (*julio 2016*)

Curso 16/17

22.– Sea f una función real de 2 variables, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Demuéstrese que, si el determinante $|H|_P$ es positivo, la forma cuadrática $d^2 f$ en P es definida. (*junio 2017*)

23.– Determina razonadamente el campo de convergencia de $\sum \dfrac{(x-2)^{2n}}{n^4 \cdot 4^n}$. (*junio 2017*)

24.– Sea z un complejo no real de módulo unidad. Demuestra que $z_1 = \dfrac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro. (*junio 2017*)

25.– Sea $\mathcal{C} = (-r, r)$. Sea $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Sea $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$.

a) ¿Cuándo decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$?

b) Si f admite desarrollo en serie en $\mathcal{C}$, ¿cuántas veces será derivable y porqué?

c) ¿Cuántos términos del desarrollo necesito en general para evaluar exactamente la función en un punto $x_0 \in \mathcal{C}$?.¿Porqué?

d) Pon un ejemplo de función para la que necesitemos sólo 3 términos del desarrollo para conocer el valor exacto de f en un punto. (*julio 2017*)

26.– Hallar el lugar geométrico de los afijos de los complejos cuyo inverso coincida con su conjugado. (*julio 2017*)

Curso 17/18

27.– Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables, de la que queremos saber si es diferenciable en un punto $P(a, b)$ de su dominio. Nos dicen que f cumple en P la condición necesaria de diferenciabilidad, pero no la suficiente.

a) Enuncia la condición necesaria. ¿Qué deducimos de que f la cumpla?

b) Enuncia la condición suficiente. ¿Qué deducimos de que f no la cumpla?

c) ¿Qué condición utilizaremos para saber si f es diferenciable en P? (*junio 2018*)

28.– Dados dos complejos en forma trigonométrica, obtener razonadamente el módulo y el argumento de su producto. (*junio 2018*)

29.– Sea f una función real de 3 variables, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Demuéstrese que, si el determinante hessiano en P es negativo, en dicho punto puede haber un máximo o un punto de silla, pero no un mínimo. (*julio 2018*)

30.– Resuelve la ecuación $z^4 - 1 = 0,\ z \in \mathbb{C}$, describiendo la figura geométrica formada por los afijos de las soluciones de la ecuación. (*julio 2018*)

Curso 18/19

31.– Se consideran la serie de potencias y la función siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,; \qquad f(x) = \frac{1}{1-x},\ \forall x \neq 1$$

Se pide razonar si la serie es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$, $\forall x \neq 1$. (*junio 2019*)

32.– Sea la ecuación $z^n - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Razónese qué podemos afirmar del número de sus raíces y la posición de los afijos de las mismas. ¿Cuántas de ellas serán reales? (*junio 2019*)

33.– Sea la función $f(x, y)$, diferenciable en un dominio D. Razona si es condición necesaria para que exista un extremo de f en $P \in D$, que se cumpla $\vec{\nabla} f_P = 0$. (*julio 2019*)

34.– Sea la sucesión funcional de término general $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, definida en $I = [0,1]$. Razona la verdad o falsedad de la afirmación: "la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en I a una función constante". (*julio 2019*)

Curso 19/20

35.– Sea f la función signo. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) f es integrable en todo $\mathbb{R}$.

b) Dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\exists F \Big/ \displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, siendo F primitiva de f. (*junio 2020*)

36.– Pon un ejemplo de series que cumplan las condiciones que se indican, justificando que las cumplen o razonando que no es posible.

a) Oscilante, absolutamente convergente.

b) Oscilante, absolutamente divergente.

c) Convergente absolutamente oscilante. (*junio 2020*)

37.– Sea $f(x, y, z, t)$, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Si $|H|_P > 0$, razona la existencia y tipo de extremos en P. (*junio 2020*)

38.– Razona si se puede utilizar la Regla de Barrow para obtener la integral de las funciones seno y tangente en el intervalo $[0, \pi]$, calculándola en caso afirmativo. (*julio 2020*)

39.– Sea la sucesión nula $\{a_n\}$, que cumple $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ y $a_n\, a_{n+1} < 0$, $\forall n$. Razona qué podemos afirmar del carácter de las series $\sum a_n$ y $\sum |a_n|$. Pon ejemplos. (*julio 2020*)

40.– Sea $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia r. Se pide obtener su campo de convergencia y la relación entre los campos de convergencia de la serie y de su serie derivada, así como entre las funciones suma de la serie y de su serie derivada. (*julio 2020*)

41.– Sea la figura formada por los afijos de los complejos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = 2+i$. Multiplicamos cada uno de ellos por $z = 1+\sqrt{3}\,i$, obteniendo los complejos z_1', z_2' y z_3' respectivamente. Se pide, sin obtener estos últimos, razonar qué forma tendrá la figura formada por los afijos de z_1', z_2' y z_3' y cuánto valdrá su perímetro. (*julio 2020*)

Curso 20/21

42.– Sea la función valor absoluto de x. Se pide razonar si tiene primitiva y, en caso afirmativo, calcularla. (*junio 2021*)

43.– Calcula las derivadas parciales de la función $f(x,y) = \ln y\, e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\, xy}$. (*junio 2021*)

44.– Obtén el desarrollo en serie de $f(x) = \mathrm{arc\,tg}\, x$ sin usar la fórmula de Taylor. (*junio 2021*)

45.– Encuentra una función f, continua en $[a,b]$, que no tenga primitiva. Si no existe tal función, razona por qué y encuentra una primitiva para cualquier f continua. (*julio 2021*)

46.– Se considera un recipiente cilíndrico lleno de agua de dimensiones interiores $r = 1m$, $h = 2m$. En un instante dado el radio empieza a aumentar a un ritmo constante de $0.1m/s$, manteniendose la forma cilíndrica y el volumen de agua retenido. ¿A qué velocidad descenderá la superficie del agua al cabo de 10 segundos?

Curso 21/22

47.– Pon un ejemplo razonado –o justifica que no existe– de función:

a) Integrable, pero no derivable.

b) Derivable, pero no integrable. (*junio 2022*)

48.– Suponiendo conocida la suma de la serie de los inversos de los cuadrados de los naturales, se pide calcular la suma de la serie de los inversos de los cuadrados de los impares. (*junio 2022*)

49.– Obtén razonadamente el campo de convergencia de la serie funcional: (*junio 2022*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+1)^n}$$

50.– Sea f una función integrable en $I = [a,b]$, tal que $f(x) < 0$, $\forall x \in I$. Razona qué relación existe entre $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ y $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right|$. (*julio 2022*)

51.– Sea $A = \sum a_n$ una serie de términos positivos. Razona qué podemos afirmar de la convergencia y de la suma (en su caso) de la serie B, de término general $b_n = a_n - a_{n+1}$. ¿Es condición necesaria para la convergencia de la serie B que a_n tienda a 0 cuando $n \to \infty$? (*julio 2022*)

Curso 22/23

52.– Considera la curva $y = 1/x^2$. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por la curva y el eje x, para valores de x mayores que 1. Explica el sentido de la frase “La región $\mathcal{R}$ tiene perímetro infinito, pero área finita”. ¿Cuánto vale dicha área? (*junio 2023*)

53.– Sea una función f de varias variables, $f \in C^2$, con un punto crítico en $\vec{x} = \vec{a}$. Utilizando el desarrollo de Taylor, se pide justificar brevemente lo siguiente:

a) Si d^2f en $x = a$ es una forma cuadrática definida, existe un extremo en $x = a$.

b) Si d^2f en $x = a$ es una forma cuadrática semidefinida se trata de un caso dudoso.

c) Si d^2f en $x = a$ es una forma cuadrática semidefinida positiva, podemos asegurar que no existe máximo en $\vec{x} = \vec{a}$. (*junio 2023*)

54.– Sea f una función diferenciable y sea P un punto de su dominio D. Si nos movemos desde el punto P a otro $P' \in D$, f tomará el valor $f(P')$, que puede ser mayor igual o menor que $f(P)$. ¿Cómo debemos movernos a partir del punto P para que el crecimiento de f sea el más rápido posible? Justifica la respuesta y obtén el valor de dicho crecimiento. (*julio 2023*)

55.– Sin utilizar los criterios de la raiz ni del cociente, obtén razonadamente el carácter de las siguientes series. (*julio 2023*)

$$\textbf{a)}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n \; ; \qquad \textbf{b)}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}\; ; \qquad \textbf{c)}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

---

2. Soluciones a las cuestiones

1.–

a) Falsa. La función $E(x)$ no es continua, pero sí continua a trozos y monótona creciente. Entre las condiciones suficientes de integrabilidad de una función (T. I, apdo. 2.3) están ser continua a trozos o monótona. Luego, por dos motivos, la función $E(x)$ es integrable.

b) Verdadera. Es consecuencia del Primer Teorema Fundamental del Cálculo: "Sea f, integrable en $I = [a, b]$. Se define $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ (función integral). Si f es continua en I, entonces F es derivable en I y se cumple $F'(x) = f(x)$". Entonces toda función continua tiene primitiva, su función integral $F(x)$.

2.–

a) La función integral de f se obtiene como

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt = -\cos x|_0^x = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$$

El teorema afirma que, si f es integrable en $I = [a, b]$, su función integral F es continua en I. Y si f es continua, F es derivable, de modo que $F' = f$. Efectivamente $(1 - \cos x)' = \operatorname{sen} x$.

b) Las áreas encerradas entre la curva y el eje OX, entre el origen y los valores dados de la abscisa, vendrán dadas por

$$S_1 = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad S_2 = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.– Según el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio $P_n(x)$, de coeficientes reales y grado n, tiene n raíces (reales o complejas) de modo que, si existe una raíz compleja, existe su conjugada. Por tanto, si un polinomio tiene raíces complejas, su número es siempre par (llamamos aquí raiz compleja a aquella de la forma $a + bi,\ b \neq 0$; es decir, a un número complejo no real). Entonces:

- Si n es impar, como el número de raíces complejas es par (o nulo), habrá un número impar de raíces reales, comprendido entre 1 (como mínimo) y n (como máximo).

- Si n es par, no tiene por qué haber ningún par de raíces complejas conjugadas: pueden ser todas reales. Ejemplo: $P_2(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Así pues, la primera parte de la afirmación es verdadera y la segunda falsa.

4.– Las expresiones del volumen del cilindro descrito y de sus derivadas parciales son

$$V = \pi r^2 h; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

El incremento del valor de una función de variables r y h, cuando r se incrementa en dr y h lo hace en dh, viene dado aproximadamente por la diferencial de la función. Entonces

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.01 + \pi \cdot 1^2 \cdot 0.02 = 0.06\pi\, m^3$$

Nota: El incremento real de volumen es $\Delta V = \pi\left[(1.01)^2 \cdot 2.02 - 1^2 \cdot 2\right] = 0.060602\pi\, m^3$ y el error cometido al aproximarlo por la diferencial, $0.000602\pi\, m^3$ (menor que el 1 % del valor real del incremento).

5.– Siguiendo el mismo método que el utilizado para las series $\sum a_n x^n$ (teorema de Cauchy-Hadamard), resulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-b)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-b| = l\,|x-b| \begin{cases} <1 & \text{converge} \\ >1 & \text{no converge} \\ =1 & \text{dudoso} \end{cases}$$

La serie converge absolutamente si $l\,|x-b|<1$ o, lo que es lo mismo, si

$$|x-b| < \frac{1}{l} \Longleftrightarrow -\frac{1}{l} < x-b < \frac{1}{l} \Longleftrightarrow b-\frac{1}{l} < x < b+\frac{1}{l}$$

El radio de convergencia, igual que en el caso $\sum a_n x^n$, vale $r = \begin{cases} 1/l & \text{si } l\neq 0,\ l\neq\infty \\ 0 & \text{si } l=\infty \\ \infty & \text{si } l=0 \end{cases}$

El campo de convergencia, centrado ahora en $x=b$, toma una de estas cuatro formas:

$$(b-r,b+r),\ \ (b-r,b+r],\ \ [b-r,b+r),\ \ [b-r,b+r]$$

donde, haciendo $b=0$, obtenemos los resultados del caso $\sum a_n x^n$.

En los extremos, $x=b\pm r$, hay que comprobar si existe convergencia sustituyendo en la serie.

6.–

a) Ecuación del plano tangente por el punto P:

$$z-f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

Diferencial de la función en P:

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy$$

b) Si f es diferenciable, su diferencial es un infinitésimo equivalente a Δf; es decir, la diferencial en un punto aproxima el incremento del valor de la función cuando estamos muy cerca del punto, siendo la diferencia entre ambos un infinitésimo de orden superior.

c) Comparando ambas expresiones obtenemos una interpretación geométrica de la diferencial: vemos que la diferencial de la función en un punto representa el incremento de la coordenada z del plano tangente cuando nos movemos desde el punto $P(a,b)$ al $P'(a+dx,b+dy)$.

7.–

a) Desarrollo de $f(x)=e^x$:

$$f^{(n}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n}(0)=1 \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) Hacemos $x=\theta i$ y calculamos sus sucesivas potencias para obtener los términos pedidos:

$$\frac{(\theta i)^0}{0!}=1;\quad \frac{(\theta i)^1}{1!}=\theta i;\quad \frac{(\theta i)^2}{2!}=-\frac{\theta^2}{2!};\quad \frac{(\theta i)^3}{3!}=-\frac{\theta^3 i}{3!};\quad \frac{(\theta i)^4}{4!}=\frac{\theta^4}{4!};\quad \frac{(\theta i)^5}{5!}=\frac{\theta^5 i}{5!}$$

c) Obtención de la fórmula de Euler. Observamos que los términos de exponente impar tienen como factor común la unidad imaginaria, lo que sugiere agrupar por separado términos pares e impares, descomponiendo el desarrollo en dos y obteniendo los desarrollos de seno y coseno:

$$e^{\theta i} = 1+\theta i-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{\theta^3 i}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{\theta^5 i}{5!}-\cdots = \underbrace{\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\dots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\dots\right)}_{\operatorname{sen}\theta}$$

8.– El cilindro tiene un volumen constante de $V = \pi r^2 l = 400\pi\, cm^3$, siendo r el radio de la base y l la longitud. Las velocidades a las que varían ambas variables son respectivamente:

- Velocidad de variación de la longitud: $\dfrac{dl}{dt} = 1\, cm/s$.
- Velocidad de variación del radio: $\dfrac{dr}{dt}$ (incógnita).

a) Relación entre las velocidades. Al ser el volumen constante

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial l}\frac{dl}{dt} = 2\pi r l\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dl}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{\pi r^2}{2\pi r l}\frac{dl}{dt} = -\frac{r}{2l}\frac{dl}{dt}$$

b) Velocidad a la que varía r. Si $l = 100\, cm$, el valor de r es: $\pi r^2 100 = 400\pi \Longrightarrow r = 2\, cm$.

Sustituyendo: $\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{l=100} = -\dfrac{2}{2\cdot 100}\dfrac{dl}{dt} = -0.01\, cm/s$.

Lógicamente, al aumentar la longitud (con el volumen constante), el radio disminuye.

9.– Observamos que la expresión de $f(x,y)$ es de primer grado en z y de segundo en x e y, por lo que podemos escribirla como

$$z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

Se trata de un paraboloide de revolución de vértice $P(1,2)$, luego el mínimo se encuentra en P. También se puede ver que, por ser una suma de cuadrados, la variable z es siempre ≥ 0, alcanzando un mínimo en $P(1,2)$.
En la segunda parte, la interpretación geométrica de la condición consiste en cortar el paraboloide por el plano vertical $x + y - 1 = 0$. Sustituyendo $y = 1 - x$ en la expresión de z, resulta la parábola $z = 2x^2 + 2$. El valor mínimo de z se alcanza –obviamente– en $x = 0$.

10.– Calculamos la raiz n-ésima del valor absoluto del término general, resultando $l = |x^2 + 1| = x^2 + 1$. Según el criterio de la raiz, la serie converge si

$$x^2 + 1 < 1 \Longleftrightarrow x^2 < 0$$

lo que no se cumple para ningún valor de x, pues $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. En el caso dudoso

$$x^2 + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0,$$

resulta la serie $\sum 1^n$, divergente. Para cualquier otro valor de x

$$x^2 + 1 > 1 \Longrightarrow \left(x^2 + 1\right)^n \to +\infty$$

por lo que la serie diverge. Así pues, el campo de convergencia $\mathcal{C} = \phi$.

Nota: Se ha usado el criterio de la raiz porque lo así pide el enunciado. Pero basta observar que $\forall x$ se trata de una serie de términos positivos. Como su término general no tiende a 0, la serie diverge, luego su campo de convergencia es vacío.

11.– La condición establece que z y z^{-1} tengan la misma parte real. Para todo $z \neq 0$ se cumple

$$z = x + yi \Longrightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i$$

Entonces

$$x = \frac{x}{x^2 + y^2} \Longleftrightarrow x(x^2 + y^2) = x \Longleftrightarrow x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (con $y \neq 0$, pues $z \neq 0$) y $x^2 + y^2 = 1$. Es decir, el eje y excluido el origen y la circunferencia de centro el punto $(0,0)$ y radio unidad.

12.– Aplicamos la definición de límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \Big/ \left|\frac{a_m}{b_m} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

Por ser $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos, $\left|\frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{a_m}{b_m} < \varepsilon \Rightarrow a_m < \varepsilon\, b_m\ \forall m \geq n.$

Lo anterior significa que $\sum a_n$ es minorante de $\sum(\varepsilon\, b_n)$. Entonces, si $\sum b_n$ converge, $\sum(\varepsilon\, b_n) = \varepsilon \sum b_n$ también converge, por lo que su minorante $\sum a_n$ lo hace también.

13.– Que d^2f sea semidefinida positiva en un punto significa que, en dicho punto, $d^2f \geq 0\ \forall d\vec{x} \neq \vec{0}$ (d^2f tiene que ser positivo al menos para un $d\vec{x}$).

Por otra parte, en un punto crítico $\vec{x} = \vec{a}$, el signo del Δf entre $\vec{x} = \vec{a}$ y $\vec{x} = \vec{a} + d\vec{x}$ viene dado por el signo de d^2f, si ésta no es nula. Luego, si d^2f es semidefinida positiva, el incremento de la función, a partir de su valor en $\vec{x} = \vec{a}$, será positivo al menos en una dirección.

En $\vec{x} = \vec{a}$ existe un máximo si existe un entorno de $\vec{a}$, tal que la función decrece al desplazarnos desde $\vec{a}$ a cualquier punto del entorno, es decir $\Delta f \leq 0$. Entonces, si d^2f es semidefinida positiva, en alguna dirección el $\Delta f > 0$, por lo que no puede haber máximo.

14.– Según el Teorema Fundamental del Álgebra, un polinomio $P_5(x)$ de coeficientes reales tiene 5 raíces, reales o complejas conjugadas, siendo por tanto el número de raíces complejas par, en caso de existir alguna (ver la solución de la cuestión **3**). Entonces:

- Habrá 0, 2 ó 4 raíces complejas.
- Habrá un número impar de raíces reales: 1, 3 ó 5.
- Pueden darse entonces tres casos: 1 raiz real y 4 complejas (conjugadas dos a dos); 3 raíces reales y 2 complejas conjugadas; 5 raíces reales.

15.–

a) El gradiente de f tiene como componentes las derivadas parciales de la función, es decir:

$$\vec{\nabla}^t f = (2x, 4y)\,|_P = (4, 4)$$

b) Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos en los que la función toma un mismo valor. En $P(2,1)$ la función vale $f(2,1) = 2^2 + 2 \cdot 1^2 = 6$. Luego la ecuación de la curva de nivel que pasa por P será $x^2 + 2y^2 = 6$.

c) La dirección de $\vec{\nabla} f$ es la de máxima variación de f a partir de su valor en P, mientras que la dirección perpendicular a $\vec{\nabla} f$ es la de variación nula de f. Como f no varía a lo largo de la curva de nivel que pasa por P, en ese punto el gradiente será perpendicular a la curva.

16.–

a) Como a_n es un infinitésimo, tiene límite 0, por lo que se cumple la condición necesaria de convergencia. Entonces $\sum a_n$ puede ser convergente, divergente u oscilante.

b) Si $a_n \to 0 \Rightarrow a_n^2 \to 0$, por lo que se cumple la condición necesaria de convergencia. Como $a_n^2 \geq 0, \forall n$, se trata de una serie de términos positivos, por lo que será convergente o divergente (una serie de términos positivos no puede ser oscilante).

c) Si $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ diverge (no tiene porqué tender a $\pm\infty$). Entonces no cumple la condición necesaria de convergencia, por lo que no converge (será divergente u oscilante).

d) Si $a_n \to 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$, por lo que no cumple la condición necesaria de convergencia. Como $\left|\frac{1}{a_n}\right| \geq 0\ \forall n$, la serie es de términos positivos, luego diverge a $+\infty$ (ver apdo. **b**).

17.–

a) $z = \rho\, e^{\theta i} = \rho \cos\theta + (\rho \operatorname{sen}\theta)\, i = x + yi.$

Entonces $e^z = e^x\, (\cos y + \operatorname{sen} y\, i) = e^{\rho\cos\theta}\, [\cos(\rho \operatorname{sen}\theta) + i \operatorname{sen}(\rho \operatorname{sen}\theta)]$.

b) A partir de la definición de exponencial compleja, la solución de esta operación es única: el complejo de módulo $e^{\rho\cos\theta}$ y argumento $\rho \operatorname{sen}\theta$.

c) Si $\rho = 2, \theta = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow \rho\cos\theta = \rho \operatorname{sen}\theta = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Entonces $e^z = e^{\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \operatorname{sen}\sqrt{2}\, i\right)$.

18.– No tiene por qué. Que $\{a_n\}$ converja significa que su límite l es finito; y la condición necesaria para la convergencia de $\sum a_n$ es que $a_n \to 0$, por lo que la serie sólo podrá converger si $l = 0$. Pero aunque se cumpla esta condición, tampoco podemos asegurar la convergencia de la serie: por ejemplo, la serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$ es divergente, aunque su término general tiende a 0.

19.–

a) Como $\forall x \in I$, se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, podemos afirmar que la sucesión funcional $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función límite $f(x) = 0$.

La condición para que la convergencia sea uniforme es que la distancia entre f_m y f puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando un m suficientemente alto

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \Big/ d\,(f_m, f) < \varepsilon, \forall m \geq n,$$

lo que equivale a decir que la distancia entre f_m y f tiende a cero, cuando $m \to \infty$.

La distancia entre f_m y f se obtiene como:

$d\,(f_m, f) = \sup |f_m(x) - f(x)|_{x\in I} = \sup \left|\dfrac{1}{m^2 x} - 0\right|_{x\in I} = \dfrac{1}{m^2}$ (se alcanza en $x = 1$).

Si $m \to \infty \Longrightarrow \dfrac{1}{m^2} \to 0$, luego la convergencia es uniforme $\left(m > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \dfrac{1}{m^2} < \varepsilon\right)$.

b) El criterio de Weierstrass afirma que "si $\sum |f_n(x)|$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos convergente, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en I".

Se cumple $\dfrac{1}{n^2 x} \leq \dfrac{1}{n^2}, \forall x \in I$, por lo que $\sum |f_n|$ tiene como mayorante a $\sum \dfrac{1}{n^2}$, serie de Rieman con $\alpha > 1$, por tanto convergente. Luego $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en I.

20.– Al ser z_2 no nulo, el cociente pedido vale:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2}$$

que será real si y sólo si su parte imaginaria es nula, es decir $\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \Longleftrightarrow bc - ad = 0$.

21.–

a) Definiciones: 1) La serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente (divergente) si y sólo si $\sum |a_n|$ es convergente (divergente). 2) La serie es incondicionalmente convergente o divergente si y sólo si al reordenar sus términos no varía el caracter (ni la suma si es convergente).

b) Demostración de "$\sum a_n$ incondicionalmente divergente $\Rightarrow \sum a_n$ absolutamente divergente":

Lo demostramos por reducción al absurdo. Sea una serie $\sum a_n$ incondicionalmente divergente. Si no es absolutamente divergente, será absolutamente convergente, pues una serie de términos positivos nunca oscila. Entonces será incondicionalmente convergente, por el Teorema de Dirichlet, con lo que llegamos a una contradicción.

c) Ejemplo: La serie $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ es absolutamente divergente ($\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica). Pero converge, pues cumple las condiciones del Teorema de Leibnitz (alternada, de términos decrecientes en valor absoluto y con $a_n \to 0$). La convergencia asegurada por el teorema se verifica en el orden dado; es decir, la serie es condicionalmente convergente.

22.– Si $f \in C^2$, las derivadas cruzadas coinciden. Por tanto $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ no puede ser nula (si lo fuera, $|\mathrm{H}| = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \leq 0$, lo que contradice el enunciado). Aplicando el criterio de Sylvester, resulta:

1) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ y $|\mathrm{H}| > 0 \Longrightarrow d^2 f$ es definida positiva.

2) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ y $|\mathrm{H}| > 0 \Longrightarrow d^2 f$ es definida negativa.

23.– Aplicamos el criterio de la raiz $n-$ésima al valor absoluto del término general (teorema de Cauchy-Hadamard):

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)^2}{4} \sqrt[n]{n^4} = \frac{(x-2)^2}{4}$$

$$l < 1 \Rightarrow \frac{|x-2|}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4$$

Resulta el intervalo $(0,4)$. Estudiamos sus extremos:

1) $x = 0 \Rightarrow \sum \dfrac{(-2)^{2n}}{n^4 4^n} = \sum \dfrac{1}{n^4}$, que es una serie de Riemann con $\alpha = 4 > 1 \Rightarrow$ convergente.

2) $x = 4 \Rightarrow \sum \dfrac{(2)^{2n}}{n^4 4^n} = \sum \dfrac{1}{n^4}$, idem al caso anterior.

El campo de convergencia es $\mathcal{C} = [0,4]$.

24.– Que $z = a + bi$ sea un complejo no real significa que su parte imaginaria es no nula, luego $|z| = a^2 + b^2 = 1;\ b \neq 0$. Entonces:

$$z_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+bi}{1-a-bi} = \frac{(1+a)+bi}{(1-a)-bi} \cdot \frac{(1-a)+bi}{(1-a)+bi} = \cdots = \frac{1-a^2-b^2+2bi}{1+a^2-2a+b^2} = \frac{b}{1-a}\, i$$

El complejo z_1 existe siempre pues $a \neq 1$. Si $a = 1$, como $b = 1 - a^2$, b sería nulo, contra el enunciado. Entonces z_1 es un número imaginario puro.

25.–

a) Decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$ si y sólo si su suma coincide con el valor de f en $\mathcal{C}$: $\sum a_n x^n = f(x),\ \forall x \in \mathcal{C}$.

b) Si f tiene desarrollo en serie, entonces $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$, por lo que f admite derivadas de cualquier orden, ya que $(a_n x^n)' = n a_n\, x^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, f es derivable tantas veces como se quiera. En este caso se dice que $f \in C^\infty$.

c) El valor de $f(x)$ en cada $x \in \mathcal{C}$ es la suma del desarrollo para ese valor de x. Por lo tanto, en general necesitamos todos los términos del desarrollo, es decir infinitos. Tomando un número finito de términos, obtendríamos sólo una aproximación del valor exacto de f.

d) Ejemplo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, que cumple: $f(0) = c,\ f'(0) = b,\ f''(0) = 2a$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n} x^n}{n!} = c + \frac{bx}{1!} + \frac{2ax^2}{2!} + 0 + 0 + \cdots = ax^2 + bx + c$$

26.– Cumplirán la condición los complejos $z = x + yi$, no nulos, tales que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \overline{z} \Longrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Longrightarrow |z|^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar geométrico pedido es la circunferencia de centro el origen y radio 1.

27.–

a) Condición necesaria: "Si f es diferenciable en P, tiene derivadas direccionales en ese punto según cualquier dirección y se cumple: $D_{\vec{\omega}} f_P = \vec{\nabla} f_P \cdot \vec{\omega},\ \forall \vec{\omega} \big/ |\vec{\omega}| = 1$ ".

Si f no cumple la C.N., puede ser diferenciable en P, pero no podemos asegurarlo.

b) Condición suficiente: Si f tiene derivadas parciales en un entorno de P y son continuas en ese punto, entonces f es diferenciable en P.

Si f no cumple la C.S., no podemos asegurar que sea diferenciable en P, pero podría serlo.

c) Lo anterior nos dice que f puede ser diferenciable, pero no lo asegura, por lo que usaremos la condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad de f en el punto $\vec{a}$, es decir

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = df(\vec{a}) + o(\vec{x} - \vec{a})$$

Haciendo $\vec{x} = (x, y),\ \vec{a} = (a, b),\ \vec{x} - \vec{a} = (x - a, y - b) = (h, k),\ df = \left(f'_x, f'_y\right) \cdot (h, k)$, la condición, escrita en forma de límite, es

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf'_x(a, b) - kf'_y(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

28.– Sean z_1 y z_2 en forma trigonométrica: $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1),\ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$. Calculando su producto, resulta:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2\right] \\ &= \rho_1\rho_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i\left(\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2\right)\right] \\ &= \rho_1\rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right] \end{aligned}$$

Resulta un complejo de módulo el producto de módulos y de argumento la suma de argumentos.

29.– Si $f \in C^2$, las derivadas cruzadas son iguales, luego el hessiano es simétrico y puede diagonalizarse por congruencia. Es decir, existe una matriz $\mathrm{C} \big/ |\mathrm{C}| \neq 0$, que cumple:

$$\mathrm{C\,H\,C^T} = \mathrm{D} \Longrightarrow |\mathrm{C}|\,|\mathrm{H}|\,\left|\mathrm{C^T}\right| = |\mathrm{C}|^2\,|\mathrm{H}| = |\mathrm{D}|$$

con lo que $|\mathrm{H}|$ y $|\mathrm{D}|$ tienen el mismo signo. Como $|\mathrm{H}| < 0, \Longrightarrow |\mathrm{D}| = d_1\,d_2\,d_3 < 0$, luego ningún d_i es nulo y deben ser negativos uno de ellos o los tres. Entonces:
- Si uno de los d_i es negativo y los otros dos positivos, la $d^2 f$ es indefinida y no hay extremo.
- Si los tres d_i son negativos, la $d^2 f$ es definida negativa y hay un máximo.
Luego puede haber máximo o punto de silla, pero no puede haber un mínimo.

30.– Las soluciones de la ecuación son las raices cuartas de la unidad, es decir:

$$z^4 = 1 = 1 \cdot e^{0i} \Longrightarrow z = \rho e^{\theta i},\ \rho = \sqrt[4]{1} = 1,\ \theta = \frac{0 + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3$$

Obtenemos los complejos $e^{0i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}$ es decir $1, i, -1, -i$. Sus afijos forman un cuadrado de centro el origen, con dos vértices en el eje real y dos en el imaginario.

31.– $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$ si y sólo si su suma coincide con el valor de f en $\mathcal{C}$ (T. IV, apdo. 3.5). La serie considerada es geométrica de razón x, por lo que converge para $|x| < 1$ y su suma vale $S = (1-x)^{-1} = f(x)$. Es decir, la suma de la serie coincide con el valor de la función, pero sólo en $\mathcal{C} = (-1, 1)$.
Fuera de $\mathcal{C}$, la función existe (salvo en $x = 1$), pero su valor no coincide con la suma de la serie (que no converge). Así pues, $\sum a_n x^n$ no es el desarrollo de $f(x)\, \forall x \neq 1$.
Nota. Otra forma de verlo es obteniendo el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en torno al punto $a = 0$, comprobando que coincide con $\sum x^n$. Calculando el campo de convergencia del desarrollo, vemos que es distinto del dominio de la función.

32.– La solución de la ecuación es $z = \sqrt[n]{1}$, es decir el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad. Sabemos (T. V, apdo. 7) que todo complejo de módulo ρ tiene n raíces n-ésimas, cuyos afijos están equiespaciados en una circunferencia de radio $\rho^{1/n}$, por lo que son los vértices de un polígono regular de n lados.
Como $\rho = 1$, la circunferencia tiene radio $r = 1$ y corta al eje real en $z = \pm 1$. Si n es par, ambos valores satisfacen la ecuación, luego existen dos raíces reales. Si n es impar, sólo $z = 1$ satisface la ecuación, luego existe sólo una raiz real.

33.– La condición necesaria de gradiente nulo se deduce para una función que posee un extremo en un punto P interior a su dominio D, siendo f diferenciable en P. De este modo, los posibles extremos estarán en puntos que cumplan las condiciones anteriores o en puntos no estudiados aún, es decir:

1) Puntos interiores de D, que cumplan $\vec{\nabla} f_P = \vec{0}$.

2) Puntos frontera del dominio.

3) Puntos del dominio en los que f no es diferenciable.

En el caso que estudiamos, al no existir puntos de D en que f no es diferenciable y ser P un punto cualquiera de D, el extremo podría estar en la frontera y no tiene por qué cumplirse $\vec{\nabla} f_P = \vec{0}$. Luego no es condición necesaria de extremo.
Ejemplo: la función $f(x, y) = x + y$ (plano), definida en $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big/\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\right\}$. Esta función alcanza su valor máximo en $P(2, 2)$, que pertenece a la frontera, donde su gradiente es el vector $(1, 1)$.

34.– Lo estudiamos en dos partes.

- Límite puntual. Si $x \in [0, 1)$, $x^n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Si $x = 1$, $x^n = 1\, \forall n$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} (1+0)^0 = 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ (1+1)^0 = 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

  Luego $f_n(x)$ converge simple o puntualmente a $f(x) = 1$.

- Convergencia uniforme. Para ver si existe, calculamos la distancia $d(f_n, f)$ y vemos si tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in I} \left| \sqrt[n]{1 + x^n} - 1 \right| = \sqrt[n]{1 + 1^n} - 1 = \sqrt[n]{2} - 1$$

  Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) = (1 - 1) = 0$, la convergencia es uniforme.

- La afirmación es cierta: $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a la función constante $f(x) = 1$.

35.–

a) Verdadera. La función vale -1 para $x < 0$, 0 para $x = 0$, $+1$ para $x > 0$, por lo que es monótona creciente. Además es constante (por tanto, continua) para $x > 0$ o $x < 0$ y tiene límites laterales finitos en $x = 0$, por lo que es continua a trozos. Entonces cumple dos condiciones suficientes de integrabilidad (T. I, apdo. 2.3.), por lo que es integrable.

b) Falsa. Al ser f integrable, existe su función integral $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, luego

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0; \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

por lo que la primera parte de la afirmación es verdadera. Sin embargo, como f tiene discontinuidades de salto en $x = 0^{\pm}$, no tiene primitiva en cualquier intervalo que contenga al origen. Luego la afirmación es falsa.

36.–

a) Oscilante, absolutamente convergente. No existe. Si una serie es absolutamente convergente, será incondicionalmente convergente (T. de Dirichlet), luego no puede ser oscilante.

b) Oscilante, absolutamente divergente. $\sum a_n = 1-1+1-1+\ldots$, cuyas sumas parciales valen 0 ó 1, según n sea par o impar, por lo que oscila. En cambio $\sum |a_n| = 1+1+1+1+\ldots$ es divergente.

c) Convergente, absolutamente oscilante. No existe, pues una serie no puede ser absolutamente oscilante. En efecto, $|a_n|$ es una serie de términos positivos por lo que será convergente o divergente, nunca oscilante.

37.– Al ser $f \in C^2$, las derivadas segundas cruzadas son iguales, por lo que la matriz hessiana H_P es simétrica y puede diagonalizarse por congruencia, es decir:

$$\exists\, C \big/ CHC^T = D \Longrightarrow |C|\,|H|\,\left|C^T\right| = |D| \Longrightarrow |C|^2\,|H| = |D|$$

luego los signos de $|H|$ y $|D|$ coinciden. Como $|H| > 0 \Longrightarrow |D| = d_1\, d_2\, d_3\, d_4 > 0$, siendo $d_{i,\, i=1,2,3,4}$ los elementos de la diagonal. Entonces el número de elementos negativos debe ser par o nulo y tenemos tres opciones:

a) Son positivos los cuatro, luego H es definida positiva y existe un mínimo en P.

b) Son negativos los cuatro, luego H es definida negativa y existe un máximo en P.

c) Dos son positivos y otros dos negativos, luego H es indefinida y en P hay un punto de silla.

Así pues, en P puede haber mínimo, máximo o punto de silla.

38.– La regla de Barrow dice que "si f es continua y g es primitiva suya, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$".

a) Se puede aplicar a la función seno, pues ésta es continua en $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

b) No se puede aplicar a la función tangente, pues no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

39.– A partir de las condiciones del enunciado, de la sucesión $\{a_n\}$ sabemos: a) que cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; b) que sus términos son decrecientes en valor absoluto; 3) que cada término tiene el signo contrario al del anterior. Entonces:

a) La serie $\sum a_n$ cumple las condiciones del T. de Leibnitz, por lo que converge. Un ejemplo es la armónica alternada $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

b) La serie $\sum |a_n|$ es de términos positivos, por lo que no puede ser oscilante. Cumple la condición necesaria de convergencia, luego puede converger, pero también diverger. Ejemplos: Si $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, $\sum |a_n|$ es la serie armónica, divergente. Si $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum |a_n|$ es la serie de Rieman $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Como $\alpha = 2 > 1$, es convergente.

40.– A partir del Teorema de Cauchy-Hadamard, si una serie de potencias tiene un radio de convergencia r, su campo de convergencia contendrá los valores de x entre $-r$ y $+r$, incluyendo los extremos o no. Por tanto tomará una de las siguientes formas:

$$[-r, r], \quad [-r, r), \quad (-r, r], \quad (-r, r)$$

Si derivamos una serie de potencias, se mantiene el radio de convergencia pero no el campo (T. IV, apdo. 3.3.). Luego hay que comprobar la convergencia para los valores extremos $x = \pm r$.
De igual modo, si la suma de la serie $\sum a_n x^n$ es $S(x)$ en su campo de convergencia, la suma de la serie derivada $\sum n a_n x^{n-1}$ será $S'(x)$ en $(-r, r)$ (no conocemos la suma en los extremos).

41.– Dibujando los afijos de z_1, z_2, z_3 observamos que forman un triángulo rectángulo isósceles, de perímetro $P = 2 + 2\sqrt{2}$. Sabemos que, al multiplicar por z los complejos cuyos afijos forman una figura geométrica, las dimensiones de la figura se multiplican por $|z|$ (T. V, apdo 3.).
Como $|z|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, la figura formada por los afijos de z_1', z_2', z_3' será un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados tendrán longitud doble que en la figura original. Por tanto, el perímetro pedido valdrá $P' = 2P = 4 + 4\sqrt{2}$.

42.– La función $y = |x|$ es continua, luego tiene primitiva por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Entonces

1. Si $x \geq 0$, $\displaystyle\int |x| \; dx = \int x \; dx = \frac{x^2}{2} + k_1$.
2. Si $x < 0$, $\displaystyle\int |x| \; dx = \int (-x) \; dx = \frac{-x^2}{2} + k_2$.

En todo $\mathbb{R}$, la función está definida y es continua, por lo que su primitiva existe y es derivable, luego es continua. Entonces, en $x = 0$ (punto frontera de los dos intervalos de definición)

$$\left.\frac{x^2}{2} + k_1\right|_{x=0} = \left.-\frac{x^2}{2} + k_2\right|_{x=0} \Longrightarrow k_1 = k_2$$

La primitiva es

$$\int |x| \; dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + k, & x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + k, & x < 0 \end{cases}$$

43.–

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y \, e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\, xy} \left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \,\mathrm{sen}\, xy + \sqrt{x}\, y \cos xy \right]$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y}\, e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\, xy} + \ln y \, e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\, xy} \sqrt{x}\, x \cos xy = e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\, xy} \left[\dfrac{1}{y} + \ln y \, x^{3/2} \cos xy \right]$

44.– Para obtener el desarrollo de f sin usar la fórmula de Taylor, derivamos la función, calculamos el desarrollo de la derivada e integramos dicho desarrollo.

1. $f(x) = \arctan x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. Podemos obtener el desarrollo de f' dividiendo directamente o bien observando que coincide con la suma de la serie geométrica de razón $\lambda = -x^2$ (convergente si $|x| < 1$):
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$
3. El desarrollo de $f(x)$ se obtiene integrando el desarrollo de $f'(x)$
$$f(x) = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$
Es decir
$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

45.– No existe ninguna función continua que no tenga primitiva pues, a partir del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que toda función continua tiene primitiva. Es decir:

1. Toda función f, continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ (es una de las condiciones suficientes de integrabilidad). Entonces existe su función integral
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
2. Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, se cumple $F'(x) = f(x)$, luego $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

46.– Calculamos la derivada del volumen respecto al tiempo, usando la regla de la cadena para funciones de varias variables y la igualamos a 0 (volumen constante). Despejamos la derivada de h y simplificamos (r no puede ser nulo pues valía 1 m. y está aumentando).

$$V = \pi r^2 h \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \pi 2r \frac{\partial r}{\partial t} h + \pi r^2 \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{2\pi r h}{\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{2h}{r} \frac{\partial r}{\partial t}$$

Calculamos r y h a los 10 segundos.

$$r_{10} = r_0 + 10 \cdot 0.1 = 2\,; \quad h_{10} = \frac{V}{\pi r_{10}^2} = \frac{\pi 1^2 \cdot 2}{\pi\, 2^2} = 0.5$$

Obtenemos la velocidad de descenso de la superficie del agua.

$$V_{sup} = \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{2 \cdot 0.5}{2}\, 0.1 = -0.05\,\mathrm{m/s}$$

47.–

a) Si f es monótona, es integrable. Si f es discontinua, no es derivable. Sirve como ejemplo una función monótona discontinua, como $E(x)$.

b) Si f es derivable, es continua. Si f es continua, es integrable. Entonces no existe ninguna función derivable, pero no integrable.

48.– Se trata de una serie de Riemann con $\alpha = 2 > 1$, luego converge a un cierto valor S. Al ser de términos positivos, converge absolutamente, luego converge incondicionalmente.
Al ser incondicionalmente convergente, podemos separarla en las subseries de inversos de los cuadrados de los impares y de los pares, despejando la primera de ellas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

Sacando fuera el factor común de los denominadores de la serie de los pares, calculamos la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} S$$

49.– Es una serie de términos positivos $\forall x$. Estudiamos su convergencia con el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(x^2+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = l$$

Tenemos tres casos:

a) $\dfrac{1}{x^2+1} < 1 \Longleftrightarrow 1 < 1 + x^2 \Longleftrightarrow x^2 > 0$, que se cumple $\forall x \neq 0$.

b) $\dfrac{1}{x^2+1} > 1 \Longleftrightarrow 1 > 1 + x^2 \Longleftrightarrow x^2 < 0$, que no se cumple para ningún valor de x.

c) $\dfrac{1}{x^2+1} = 1 \Longleftrightarrow 1 = 1 + x^2 \Longleftrightarrow x^2 = 0$, que se cumple para $x = 0$. En este caso, la serie se convierte en $\sum n$, que es divergente.

Así pues, el campo de convergencia es $\mathcal{C} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

50.– Estudiamos por separado ambas expresiones. Al ser $f(x) < 0$, $\forall x \in I$, resulta

1. $f < 0 \Longrightarrow |f| = -f \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b \Big(-f(x)\Big) dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. $f < 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx < 0 \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$

La integral del valor absoluto, $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$, coincide con el valor absoluto de la integral, $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right|$.

51.– Calculamos el valor de una suma parcial de la serie B.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

La serie B será convergente si y sólo si S_n tiene límite finito S, es decir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = S \in \mathbb{R}$$

lo que equivale a decir que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - S = k \in \mathbb{R}$$

Es decir, la serie B converge si y sólo si a_n tiene límite finito k, en cuyo caso $S = a_1 - k$.

Entonces no es necesario que $a_n \to 0$ $\big($condición necesaria de convergencia de la serie $\sum a_n\big)$.

En efecto, si $a_n \to k$, resulta

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = k - k = 0$$

con lo que la serie B cumple la condición necesaria de convergencia.

Por ejemplo, la serie $\sum\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ no converge, pues su término general tiende a 1. Pero la serie obtenida a partir de ella sí lo hace:

$$\sum(a_n - a_{n+1}) = \sum\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{n+1}\right) = \sum\frac{1}{n(n+1)}$$

52.– La curva es la rama derecha de una hipérbola equilátera, para $x > 1$. Si $x \to \infty$, entonces $1/x^2 \to 0$, por lo que el eje OX es una asíntota horizontal. Como la curva y el eje no llegan a tocarse, la región $\mathcal{R}$ no se cierra y podemos decir que su perímetro es infinito.

Para obtener el área de la región, planteamos la integral de la función entre $x = 1$ y $x = a$ y calculamos el límite cuando $a \to \infty$.

$$A_{\mathcal{R}} = \lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$$

Como este límite vale 1, decimos que el área de la región es finita.

53.– Escribimos los 3 primeros términos del desarrollo de Taylor de f en $\vec{a}$, llamando $d\vec{x}$ a $\vec{x}-\vec{a}$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla}f(\vec{a})\cdot d\vec{x} + \frac{1}{2!}d\vec{x}^{\,t}\underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}}\,d\vec{x} + \dots$$

Pasamos ahora $f(\vec{a})$ a la izquierda, quedando $f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \Delta f$. Y vemos que $\vec{\nabla}f(\vec{a})\cdot d\vec{x} = 0$ por ser $\vec{x} = \vec{a}$ un punto crítico.

También observamos que $d\vec{x}^{\,t}\underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}}\,d\vec{x} = d^2f(\vec{a})$ y los siguientes sumandos son infinitésimos de orden superior (despreciables frente a $d\vec{x}$ si $\vec{x}$ está muy próximo a $\vec{a}$). Entonces

$$\Delta f = d^2f(\vec{a}) + \dots$$

por lo que $d^2f(\vec{a})$ nos da la parte principal (y, por tanto el signo) de Δf, al pasar de $\vec{a}$ a $\vec{x}$. Ahora podemos justificar las tres afirmaciones:

1. Si la forma cuadrática es definida positiva, $d^2f(\vec{a}) > 0$, $\forall\vec{x}\in U_{\vec{a}} \Longrightarrow \Delta f > 0$. Entonces la función crece al pasar de $\vec{a}$ a $\vec{x}$, por lo que en $\vec{x} = \vec{a}$ hay un mínimo.

   Si la forma cuadrática es definida negativa, $d^2f(\vec{a}) < 0$, $\forall\vec{x}\in U_{\vec{a}} \Longrightarrow \Delta f < 0$. Entonces la función decrece al pasar de $\vec{a}$ a $\vec{x}$, por lo que en $\vec{x} = \vec{a}$ hay un máximo.

2. Si la forma cuadrática es semidefinida, $d^2f(\vec{a}) \geq 0$ o $d^2f(\vec{a}) \leq 0$, dependiendo de $d\vec{x}$. Entonces $d^2f(\vec{a}) = 0$ para algún $d\vec{x}$, en cuyo caso el signo de Δf lo darán los siguientes términos del desarrollo, por lo que se trata de un caso dudoso.

3. A pesar de lo anterior, si $d^2f(\vec{a})$ es semidefinida positiva, significa que para algún $d\vec{x}$, $d^2f(\vec{a}) > 0$. En este caso $\Delta f > 0$, luego para algún $d\vec{x}$ la función crece y en $\vec{x} = \vec{a}$ no puede haber un máximo.

54.– Debemos movernos en la dirección y sentido de su vector gradiente $\vec{\nabla} f(P)$. Lo justificamos en el caso de 2 ó 3 variables.

Si una función es diferenciable, su derivada con respecto a la dirección dada por $\vec{\omega}$ (unitario) es

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{\omega}$$

En 2 ó 3 variables, el producto escalar de dos vectores se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Entonces, al ser $\vec{\omega}$ unitario,

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \|\vec{\nabla} f(P)\| \, \|\vec{\omega}\| \, \cos\varphi = \|\vec{\nabla} f(P)\| \, \cos\varphi$$

Este producto será máximo si $\cos\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$. Así pues, la variación de f será la más rápida posible en la dirección y sentido del vector gradiente, es decir, según el unitario

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\nabla} f(P)}{\|\vec{\nabla} f(P)\|}$$

Para obtener el valor de este crecimiento, calculamos la derivada según la dirección de $\vec{\omega}$:

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} f(P) \cdot \frac{\vec{\nabla} f(P)}{\|\vec{\nabla} f(P)\|} = \frac{\|\vec{\nabla} f(P)\|^2}{\|\vec{\nabla} f(P)\|} = \|\vec{\nabla} f(P)\|$$

El máximo crecimiento viene dado por el módulo del vector gradiente.

55.–

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ es geométrica de razón $\dfrac{e}{\pi} < 1$, por tanto convergente.

b) Por la equivalencia entre un infinitésimo θ_n y el seno de θ_n, el término general de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ es equivalente a $\dfrac{1}{n}$, luego la serie tiene el mismo carácter que la armónica (divergente).

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\ln n < n$, por lo que $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ $(\forall n > 1)$, luego la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ es mayorante de la armónica, por tanto divergente.

---

3. Problemas de examen

Curso 10/11. Examen de junio

1.– Se considera la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(|x|+|y|)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \beta, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Halla la relación entre α y β para que existan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en (0,0).

b) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2.– Halla el campo de convergencia de la serie potencial $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\ln n}}$

3.– Dadas las curvas: $f(x)=e^x,\ g(x)=|\operatorname{sen}x|,\ x=0,\ x=2\pi$, se pide:

a) Dibujar la región que delimitan y plantear su área mediante integrales definidas.

b) Calcular por integración el volumen que genera dicha región, al girar alrededor del eje OX.

Curso 10/11. Examen de julio

4.– Sea la función $f(x,y,z)$, dos veces diferenciable. Haciendo $x=ut,\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-t^2),\ z=v$, obtenemos la función compuesta $w(u,v,t)$. Se pide calcular el valor de

$$E=f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}-\frac{1}{u^2+t^2}(w''_{uu}+w''_{tt})-w''_{vv}$$

5.– Dada la serie potencial $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{a^{2n}}$, $a>0$, se pide

a) Hallar el campo de convergencia.

b) Calcular la suma de la serie.

6.– Se considera la región $\mathcal{R}$ del plano encerrada por las curvas:

$$x^2+y^2=16,\ y=4-x^2,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

a) Dibuja la región y calcular su área.

b) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OX.

c) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OY.

Curso 11/12. Examen de junio

7.– Determina la relación que debe existir entre $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha |y|^\beta \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sea diferenciable en $(0,0)$.

8.– Sea la función $r(x,y) = f(3x+2y) + g(x-2y)$. Demuestra que se verifica:

$$4\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0$$

9.– Calcula la derivada n-ésima de $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Utiliza este resultado para obtener el desarrollo de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}$.

10.– Sea la curva $\mathcal{C}: \ (y-1)^2 - x - 1 = 0$. Se considera el área A comprendida entre $\mathcal{C}$ y OY, así como el arco S de la curva, comprendido entre los puntos $P(0,0)$ y $Q(0,2)$. Se pide:

a) El volumen del cuerpo obtenido al girar A en torno a OX.

b) El área de la superficie generada al girar S en torno al eje $y = 1$.

Curso 11/12. Examen de julio

11.– Consideramos la función $z = vf(w)$, siendo f una función diferenciable. Además, $u = -2x + 2y$ y $v = 4x$, con $w = uv$. Obtén el valor máximo de la derivada direccional de z con respecto a x e y en el punto $P\,(x = 1/2,\ y = 1)$, sabiendo que $f(2) = 1$ y que $f'(2) = 1$.

12.– Sea la serie de término general $a_n = n^a \tan \dfrac{1}{n}$.

a) ¿Para qué valores de a se verifica la condición necesaria de convergencia?

b) ¿Para qué valores de a converge la serie anterior?

c) Estudia, para $a = \dfrac{1}{2}$, el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

13.– Sean a y b dos números reales distintos. Halla el lugar geométrico de los afijos de los complejos z que cumplen: $|z-a| = |z-b|$.

14.– Obtén por integración el volumen limitado por la superficie $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$, que se encuentra por encima del plano XY.

Curso 12/13. Examen de junio

15.– Dada la función $w = x^3 f\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$, se pide:

a) Encontrar el valor de $E = x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

b) Obtener $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

16.– Estudia, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, el carácter de la serie numérica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\lambda^n}$

17.– Sea el paraboloide elíptico de ecuación $z = 1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2}$. Se pide:

a) Calcular el volumen comprendido entre el paraboloide y el plano horizontal.

b) Representar la curva intersección del paraboloide con el plano YZ. Obtener el área de la superficie generada al girar, en torno al eje z, la parte de dicha curva situada por encima del plano XY.

Curso 12/13. Examen de julio

18.– Dado el sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z,t) = e^{(x-z)} + yt + 3 = 0 \\ G(x,y,z,t) = e^{(y+t)} - xz = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Comprobar que el sistema anterior define a z y a t como función implícita de x e y en un entorno del punto $(x,y,z,t) = (1,2,1,-2)$.

b) Hallar el gradiente de $z = z(x,y)$ en el punto $(1,2)$.

c) Hallar la derivada direccional de $t = t(x,y)$ en el punto $(1,2)$ según la dirección del vector $\bar{u} = (1,1)$.

19.– Dada la serie potencial $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{n-1} x^{n-1}$, se pide:

a) Hallar su campo de convergencia.

a) Calcular su suma cuando sea convergente.

20.– Sea $\mathcal{R}$ la región del plano limitada por la gráfica de la función $y = x^2 - x$ y el eje OX, entre $x = 0$ y $x = 2$. Se pide calcular el área de dicha región y el volumen que genera $\mathcal{R}$ cuando gira alrededor del eje OX y cuando gira alrededor del eje OY.

Curso 13/14. Examen de junio

21.– Se considera la ecuación $xe^x\left(y^2-2y\right)+g\,(2z+\operatorname{sen}z)=0$

a) ¿Qué condiciones debe cumplir la función $g\,(2z+\operatorname{sen}z)$ para que la ecuación defina a $z=\phi(x,y)$ como función implícita de x e y, en un entorno del punto $P(x,y,z)=(0,3,0)$?

b) Comprueba que la función $g(u)=e^u-1$ verifica las condiciones anteriores. Para este caso, determina la derivada de $\phi(x,y)$ en $(0,3)$ según la dirección dada por la tangente a la curva $y=x^2+2x+3$ en el mismo punto.

22.– Se pide:

a) Estudiar el carácter de la serie numérica: $\sum \dfrac{k^n(n^3+2n)}{4^n+2^n}, \quad k\in\mathbb{R}.$

b) Dada la serie convergente de términos positivos $\sum a_n$, estudiar el carácter de $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

23.– En el plano XY se considera el recinto $\mathcal{R}$ limitado por las curvas $C_1: x^2+y^2-1=0$ y $C_2: x+y^2-1=0$, en el semiplano $x\geq 0$. Se pide:

a) Dibujar el recinto $\mathcal{R}$ y calcular el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ en torno del eje y.

b) El giro anterior produce un sólido hueco. Plantear (sin resolver la integral) el cálculo del área de la superficie interior de dicho sólido.

Curso 13/14. Examen de julio

24.– Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\operatorname{sen}xy$. Se pide:

a) Definir la función f en los puntos de la forma $(0,b)$ para que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

b) Sabiendo que f es diferenciable en el punto $(1,\pi)$, encontrar en dicho punto la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$.

25.– Sea la serie funcional $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$, cuya suma vale $S(x)=\operatorname{sen}^2 x,\ \forall x\in(-r,r)$. Calcula la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\,x^{n-2}$ en $(-r,r)$.

26.– Sea la región $\mathcal{R}$, limitada por las curvas $y=-x^2+5$ y $y=|x-1|$, siendo $x\geq 0$. Se pide:

a) Calcular su área.

b) Plantear la expresión integral para calcular el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OX.

Curso 14/15. Examen de junio

27.– Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y)=2x+y^2$ en el conjunto

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 2,\ y^2-x\geq 0\right\}$$

28.– Sea la función $f(x)=\ln(1+x^3)$, cuyo desarrollo en serie de potencias es

$$3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+3}}{3n+3}$$

con $x\in(-1,1)$. Justifica si dicho desarrollo es válido en los extremos del intervalo $(-1,1)$.

29.– Se considera el trazado del tranvía de una estación de montaña. La vía es rectilínea en planta, mientras que la cota de cada punto viene dada por la expresión $z=0.2\,x^{1.5}$, siendo x la distancia horizontal en kilómetros desde el punto de salida del tranvía al punto de la curva considerado. La longitud de la vía en horizontal es $5\,km$. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el tranvía se desplaza (tanto en ascenso como en descenso) a una velocidad de $12\,km/h$, calcular el tiempo que emplea en realizar el recorrido de ascenso.

b) Si las ruedas del tranvía tienen un radio de $0.5\,m$ y ruedan sin deslizar sobre la vía, obtener el número de vueltas que da cada una durante el ascenso (se desprecia la longitud del tranvía).

Curso 14/15. Examen de julio

30.– Sea $z=f(x,y)=e^x\cos y$, donde x e y son las funciones de t definidas implícitamente por las ecuaciones

$$\begin{cases}x^3+e^x=t^2+t+1;\\ yt^2+y^2t+y-t=0\end{cases}$$

y tales que $x(0)=0$ e $y(0)=0$. Obtén el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ en $t=0$.

31.– Estudia la convergencia del siguiente desarrollo y obtener su función suma, si converge.

$$3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+3}}{3n+3}$$

32.– Un tranvía realiza un recorrido de ascenso a una montaña a una velocidad de $12\,km/h$ en un tiempo de 30 minutos. Sus ruedas tienen un radio de $1/\pi$ metros, ruedan sin deslizar sobre los raíles y la posición de cada punto del exterior de la rueda viene dado por las coordenadas (x_r,y_r) definidas por las ecuaciones:

$$x_r=\frac{\theta-\operatorname{sen}\theta}{\pi};\quad y_r=\frac{1-\cos\theta}{\pi}$$

siendo θ el ángulo de giro de la rueda respecto del punto de partida.
Se pide calcular por integración simple la distancia total recorrida por un punto exterior de una de las ruedas del tranvía. Se considera el recorrido rectilíneo tanto en planta como en alzado.

Curso 15/16. Examen de junio

33.– Dada la función $z = z(x, y) = x^y + f(y^x)$, calcula el valor de $E = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y \ln y \dfrac{\partial z}{\partial y}$

34.– Estudia la diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$, de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

35.– Calcula el radio y el campo y de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=30}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{30}}}{(n+1)(n+2)\,3^n}(x-5)^n$$

36.– Sean las curvas de ecuaciones $C_1 : y = \dfrac{x^4}{3} + 3x^3 - 2x^2$ y $C_2 : y = 3x^3 + x^2$. Se pide:

a) Dibujar la región del plano encerrada entre ambas curvas para $x \geq 2$ y calcular su área.

b) Plantear la integral que permite calcular el volumen generado al hacer girar el área definida alrededor del eje OX.

c) Plantear la integral que permite calcular la superficie del cuerpo de revolución que se genera al hacer girar C_1 en torno al eje OY, entre $x = 2$ y $x = 5$.

Curso 15/16. Examen de julio

37.– Se sabe que el nivel de contaminación de una zona de la costa depende principalmente del tráfico marítimo (número de barcos v por unidad de tiempo) y de los vertidos en la costa (toneladas de vertidos u por unidad de tiempo). Se ha comprobado que una estimación fiable del nivel de contaminación viene dado por la expresión $z = 2v + u\,g(u \cdot v)$, siendo g diferenciable.
Además, se sabe que u y v dependen de la altura media de ola (x), así como del número de horas de sol en la costa (y), según las expresiones $u(x, y) = 2y$, $v(x, y) = -x + 3y$.
Utilizando la derivada direccional, se pide determinar el valor máximo de la tasa de variación del nivel de contaminación en la costa, para los siguientes valores de las variables: $x = 2$, $y = 1$, $g(2) = 1$, $g'(2) = -1$.

38.– Estudia el carácter de la siguiente serie numérica en función de los parámetros $a > 0$ y $b > 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n \frac{1}{n}$$

39.– Se considera un cono recto de altura H y base circular de radio R. Se pide obtener por integración simple las expresiones de su volumen y su superficie lateral.

Curso 16/17. Examen de junio

40.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) Estudiar para que valores del parámetro k la función es continua.

b) Estudiar para que valores del parámetro k las derivadas parciales son continuas en el $(0,0)$.

c) Estudiar para que valores del parámetro k la función es diferenciable en el $(0,0)$.

41.– Estudia la convergencia del desarrollo siguiente y obtener la función suma, si converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

42.– Se considera la región plana: $\mathcal{R} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq |x|\Big\}$.

a) Plantea el cálculo por integración del área de la región $\mathcal{R}$.

b) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor del eje OY.

c) Calcula por integración la superficie que genera la frontera de $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OX.

Curso 16/17. Examen de julio

43.– La temperatura de una placa viene dada por la función $T(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x^2y^2}$.

a) ¿En qué dirección tendremos que desplazarnos desde el punto $(1,1)$ para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? Justificar la respuesta.

b) ¿En qué dirección, desde el mismo punto, la tasa de variación de la temperatura es de $\dfrac{1}{4}$?.

c) Dada la curva en paramétricas $\vec{\varphi}(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t)$, calcula $(T \circ \vec{\varphi})'(0)$. ¿Qué representa dicho valor?

44.– Estudia el carácter de las siguientes series y, de ser posible, calcula su suma.

$$\textbf{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2n^2+n}.$$

45.– Considera la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

a) Plantea el cálculo por integración del perímetro de la elipse.

b) Calcula por integración del área interior a la elipse.

c) Calcula por integración el volumen que genera dicha región al girar alrededor del eje OX.

Curso 17/18. Examen de junio

46.– Calcula los extremos de la función $f(x,y) = xy$, definida sobre la parte de la elipse de ecuación $2x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$ que verifica que $y \geq 0$.

47.– Estudia el carácter de las siguientes series de números reales:

$$\textbf{a)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} \qquad\qquad \textbf{b)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}$$

48.– Calcula el radio, campo de convergencia y función suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}$$

49.– Dados el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, se pide hallar por integración el volumen exterior al cilindro e interior a la esfera.

Curso 17/18. Examen de julio

50.– Demuestra que la función $z = xf(x^2 - y^3)$, siendo f diferenciable, satisface la ecuación:

$$3y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 z}{x}$$

Calcula la dirección de máximo crecimiento de z como función de x e y en el punto $P(1,1)$ sabiendo que $f(0) = f'(0) = 2$.

51.– Estudia el carácter de las siguiente series y, si es posible, calcular su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 2n}{n!} \qquad \text{Dato}: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

52.– Estudia la convergencia puntual y uniforme de la siguiente sucesión funcional en $[0,1]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

53.– Calcula por integración el volumen del elipsoide de ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

Curso 18/19. Examen de junio

54.– Obtén, a través de la correspondiente función lagrangiana, los extremos de la función $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2$ que se encuentren en la recta $x + y = 0$.

55.– Estudia el carácter de las siguientes series y, de ser posible, calcula su suma.

$$\textbf{a)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)}; \qquad\qquad \textbf{b)}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n\ln n \ln(\ln n)}.$$

56.– El plano $z = 0$ representa el suelo horizontal de una aldea esquimal. Sobre este suelo se construye un iglú, cuya superficie exterior viene dada por $x^2 + y^2 + 3z = 9, z \geq 0$, y su superficie interior por $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ (unidades en metros). El coste por m^3 del hielo ya colocado, $f(z)$, depende de la altura. Se pide, utilizando integración simple:

a) Calcular el volumen de hielo necesario para la construcción del iglú.

b) Plantear la expresión del coste de construcción del iglú.

Nota: No se consideran puertas ni ventanas.

Curso 18/19. Examen de julio

57.– Determina el punto en el que alcanza un extremo la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^3 + 3y^3 - x^2 + y^2$ según la dirección del vector $(1, 2)$. Averigua el tipo de extremo del que se trata, así como el valor de la derivada direccional en ese punto.

58.– Estudia el carácter de la siguiente serie en función del parámetro a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(1+a)^n} \quad (a \neq -1)$$

Indica si hay algún valor de a para el cual la serie es condicionalmente convergente.

59.– Calcula el radio, campo de convergencia y función suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

60.– Calcula por integración simple la superficie y el volumen de la esfera de radio R.

Curso 19/20. Examen de junio

61.– Sea la ecuación $x^2 + \ln x = \cos t - t$.

a) Justifica que esta ecuación define a x como función implícita de t, diferenciable en un entorno de $t = 0$, $x = 1$.

b) Sea ahora la ecuación $y^2 t - e^t - yt + y = 0$, que define a y como función implícita de t, diferenciable en un entorno de $t = 0$, $y = 1$ (no hace falta justificarlo). Obtén la derivada de y con respecto a t en $t = 0$.

c) Se define la función $z = f(x, y) = \operatorname{sen}(x\sqrt{y})$, siendo x e y las definidas en los apartados anteriores. Calcula la derivada de la función compuesta $z(t)$ respecto a t en el punto $t = 0$.

62.– Sea la serie:

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\ldots$$

Se pide estudiar la convergencia y -si converge- obtener la suma, indicando de qué tipo de convergencia se trata.

63.– Sean las curvas $C_1 : x^2 + y^2 - 2 = 0,\ y \geq 0$ y $C_2 : x^2 - y = 0$, que delimitan la región $\mathcal{R}$. Sean P y Q sus puntos de intersección. Se pide calcular:

a) El área de la región $\mathcal{R}$, dibujándola previamente.

b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ en torno al eje y.

c) La longitud del arco de C_1 comprendido entre P y Q.

d) El área de la superficie generada por el giro del arco anterior en torno al eje x.

Curso 19/20. Examen de julio

64.– De un cilindro de madera de diámetro $d = 1\,m$. se obtiene una viga de sección rectangular de anchura x y altura y. La rigidez R de una viga rectangular es proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Obtén la función lagrangiana y halla, por el método de extremos condicionados, las dimensiones de la viga de máxima rigidez.
Nota: se sugiere maximizar el cociente de R y la constante de proporcionalidad.

65.– Estudia el carácter de la serie:

$$\sum \frac{n^{3n}}{(2n)!}$$

66.– Se considera el arco $\mathcal{A}$ de ecuación:

$$2y - x^2 + \frac{1}{2}\ln x = 0 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

Se pide:

a) El área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

b) La longitud del arco.

c) El área de la superficie obtenida al girar $\mathcal{A}$ en torno al eje OY.

Curso 20/21. Examen de junio

67.– El carácter de cada una de las siguientes series se puede obtener por uno o más de los siguientes criterios: raíz, Raabe, logarítmico y condensación. Sabiendo que cada criterio puede utilizarse sólo una vez, asigna a cada una el más adecuado y obtén su carácter.

$$\textbf{a)} \sum \frac{1}{n \ln n}\ ; \quad \textbf{b)} \sum \frac{1}{n^2}\ ; \quad \textbf{c)} \sum \frac{1}{2^n}\ ; \quad \textbf{d)} \sum \frac{e(e+1)(e+2)\ldots(e+n)}{\pi(\pi+1)(\pi+2)\ldots(\pi+n)}$$

68.– Calcula los extremos de la función $f(x, y, z) = x + z$, situados en la esfera de centro el origen y radio unidad. Justifica el tipo de extremo que resulte.

69.– Sea la función $f(x, y) = e^{x+y}$. Se pide obtener el desarrollo en serie de Taylor en torno al punto $(0, 0)$.

70.– Sea un terreno horizontal, al que corresponde un valor nulo de la coordenada z. Se considera una esfera de radio $R = 4\,m$ cuyo centro está $1\,m$ por encima del plano del terreno. Se pide:

a) Calcular por integración el volumen de la esfera que se encuentra bajo la superficie.

b) Deseamos excavar el volumen del apartado anterior. Si el coste de la extracción de tierra es $f(z)$, función de la profundidad en euros/m^3, plantea la expresión integral que nos da el coste de la excavación en euros.

Curso 20/21. Examen de julio

71.– Se pide el término general, el carácter y la suma (si convergen), de las series cuyos términos son los inversos de los cuadrados de: **a)** Los pares; **b)** Los impares. Dato: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

72.– Obtén la suma y el campo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

73.– Calcula los extremos relativos de la función f, justificando el tipo de extremo que resulte.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\,e^{x^2-y^2}$$

74.– Sea la curva de ecuación $y = |\operatorname{sen} nx|$, $n \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) El área limitada por la curva y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi$, para $n = 1$.

b) El área limitada por la curva y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \pi$, para n cualquiera.

c) El volumen obtenido al girar en torno a OX el área plana del apartado **b)**.

Curso 21/22. Examen de junio

75.– Se pide:

a) Hallar el desarrollo de Taylor de segundo orden en torno al origen, de la función $f(x, y) = x \cos y + y \operatorname{sen} x$.

b) Obtener un valor aproximado de la expresión $A = 0.2 \cos(0.1) + 0.1 \operatorname{sen}(0.2)$, indicando el error relativo cometido (considera como valor exacto $A = 0.2188$).

76.– Sean cuatro números reales positivos de suma 20. Demuestra que la suma de sus cubos vale como mínimo 500.

77.– Sea un triángulo de lado unidad (T_1). Si unimos entre sí los puntos medios de sus lados obtenemos cuatro triángulos. Tomamos el triángulo central (T_2) y repetimos con él la operación, obteniendo otros cuatro triángulos. Tomamos de nuevo el triángulo central (T_3) y repetimos la operación. Y así sucesivamente... Se pide:

a) La expresión de la suma S_n de las áreas A_i de n triángulos $T_{i,\ i=1,2,\ldots,n}$ consecutivos así obtenidos: $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$.

b) El límite de S_n cuando $n \to \infty$.

c) Ahora consideramos en cada paso los perímetros de todos los triángulos producidos (no sólo del central). Es decir P_1 representa el perímetro del triángulo T_1, P_2 representa la suma de perímetros de los cuatro triángulos en que se divide T_1, P_3 representa la suma de perímetros de los dieciséis triángulos obtenidos tras una nueva división, etc.

Calcula el límite de la suma de $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, cuando $n \to \infty$.

78.– Se considera la superficie S, de ecuación $z + 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Se pide:

a) Obtener la ecuación de la curva intersección de S con el plano XY e identificar dicha curva.

b) Calcular por integración el área encerrada por la curva.

c) Calcular por integración el volumen limitado por la superficie y el plano XY.

Curso 21/22. Examen de julio

79.– Se considera un depósito de agua con forma de cilindro recto de altura h y base circular de radio r. El depósito no tiene tapa superior y el espesor de las paredes es despreciable. Si su superficie exterior vale $S = 12\pi\, m^2$, se pide calcular las dimensiones r y h que hacen máxima su capacidad, obteniendo ésta y justificando que se trata de un máximo.

80.– Sea la función $f(x, y) = e^{x \operatorname{sen} y}$. Sea el punto $P(1, 0)$. Se pide obtener:

a) La dirección por la que debemos movernos en el plano XY, a partir del punto P, para que la variación de f sea máxima; y el valor de esa variación.

b) La diferencial segunda de la función f en P.

81.– Calcula la suma de la siguiente serie, con ayuda de la serie de potencias $\sum x^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

82.– Sea la función $f(x) = x e^{-x}$. Se pide:

a) Calcular el área limitada por la curva y el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$.

b) Estudiar el comportamiento de la curva cuando $x \to \infty$ y obtener el área total limitada por la curva y la parte positiva del eje x.

Curso 22/23. Examen de junio

83.– Calcula la suma (si converge) de la serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n(n-2)}\right)-\frac{1}{n(n-2)}\right]$$

84.– Obtén las dimensiones de la caja paralelepipédica de volumen máximo y diagonal dada L.

85.– Sea la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Se pide:

1. Radio y campo de convergencia.
2. Función suma.
3. A partir del resultado anterior obtener el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

86.– Se considera la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante, encerrada por las curvas l_1 y l_2 siguientes: $l_1 : x^2+y^2=4$; $l_2 : x^2+y=2$. Se pide:

a) Plantear el cálculo por integración del área de $\mathcal{R}$.

b) Calcular por integración el volumen generado por $\mathcal{R}$ al girar alrededor del eje OY.

c) Calcular por integración la longitud de l_1, razonando si era esperable el resultado.

d) Calcular por integración el área de la superficie generada por l_1 al girar alrededor del eje OX, razonando si era esperable el resultado.

Curso 22/23. Examen de julio

87.– Sea una ventana formada por un rectángulo de altura h con un semicírculo de radio r en la parte superior, de modo que el diámetro del semicírculo coincide exactamente con el lado superior del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es $4+\pi$, se pide obtener las dimensiones que hacen máxima el área de la ventana, justificando que se trata de un máximo.

88.– Se considera una mosca posada en la cara superior de un cilindro recto de altura 4 metros y base circular de radio unidad. En un momento dado el radio de la base del cilindro empieza a crecer a una velocidad de 20 centímetros por segundo, manteniéndose la forma cilíndrica y el volumen constante. Se pide:

a) Velocidad a la que desciende la mosca posada en el cilindro a los 5 segundos de iniciarse el movimiento.

b) Tasa de variación de la superficie lateral del cilindro en ese mismo instante, indicando las unidades de dicha tasa.

89.– Sea la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2n^2-n}$$

Se pide:

1. Calcular el radio y campo de convergencia.
2. Obtener la suma de la serie numérica para el caso particular $x=0$.

90.– Calcula el volumen comprendido entre la superficie esférica de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen y la superficie de ecuación $z-x^2-y^2=0$.

---

4. Soluciones a los problemas

1.– **a)** Las derivadas parciales sólo existen (son nulas) si $\alpha = \beta$.

b) La función sólo es diferenciable en el caso $\alpha = \beta = 0$ (función nula).

2.– $\mathcal{C} = [-1, 1)$

3.– **a)** $A = \displaystyle\int_0^{\pi} (e^x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (e^x + \operatorname{sen} x)dx$. **b)** $V = \frac{\pi}{2}\left(e^{4\pi} - 2\pi - 1\right) u^3$.

4.– $E = 0$.

5.– **a)** $\mathcal{C} = (-a, a)$. **b)** $S(x) = \dfrac{x^4}{a^2 - x^2}$, $\forall x \in \mathcal{C}$.

6.– **a)** $A = \dfrac{12\pi - 16}{3}\, u^2$.

b) $V_{OX} = 2\pi\displaystyle\int_0^4 y\left(\sqrt{16 - y^2} - \sqrt{4 - y}\right)dy$. O bien $V_{OX} = \pi\displaystyle\int_0^2 (7x^2 - x^4)dx + \pi\int_2^4 (16 - x^2)dx$.

c) $V_{OY} = 2\pi\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{16 - x^2}\, dx - 2\pi\int_0^2 x(4 - x^2)\, dx$. O bien $V_{OY} = \pi\displaystyle\int_0^4 (12 - y^2 + y)\, dy$.

7.– La condición de diferenciabilidad se cumple si $\alpha + \beta - 1 > 0$.

8.– Se demuestra haciendo $3x + 2y = u$, $x - 2y = v$ y expresando (regla de la cadena) las derivadas de r respecto a x, y en función de las derivadas segundas de f y g respecto a u, v.

9.– $g^{(n}(x) = \dfrac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)x^n$.

10.– $V = \dfrac{8\pi}{3}\, u^3$. $A = \dfrac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) u^2$.

11.– Viene dada por el módulo del vector gradiente en P : $\left|\overline{\nabla z}\right| = 4\sqrt{5}$.

12.– **a)** $a < 1$. **b)** $a < 0$. **c)** Converge condicionalmente (Teorema de Leibnitz).

13.– El lugar geométrico pedido es la recta de ecuación: $x = \dfrac{a + b}{2}$.

14.– $V = \dfrac{100\pi}{3}\, u^3$.

15.– **a)** $E = 3\, w$.

b) Llamando $u = z/x$ y $v = y/x$ obtenemos: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 2x\dfrac{\partial f}{\partial v} - z\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. Suponiendo que se cumplen los requisitos del Teorema de Schwarz, puede también calcularse más brevemente como $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$, obteniendo el mismo resultado.

16.– $\lambda < -1$, converge ; $-1 \leq \lambda < 0$, no converge ; $0 < \lambda \leq 1$, diverge ; $\lambda > 1$, converge.

17.– **a)** $V = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{2}\, u^3$. **b)** Ecuación de la curva en YZ : $z = 1 - \dfrac{y^2}{2}$. $A = \dfrac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) u^2$.

18.– **a)** F y G se anulan en P. Las 8 derivadas parciales de F y G respecto a x, y, z, t son continuas en todo $\mathbb{R}^4$. El determinante de $\vec{g} = (F, G)$ respecto a (z, t) en $(1, -2)$ vale $1 \neq 0$.

b) $\vec{\nabla} z\Big|_{(1,2)} = (-3, 4)$. **c)** $D_{\vec{u}}\, t|_{(1,2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

19.– **a)** $\mathcal{C} = \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. **b)** $S(x) = -\dfrac{1}{3}\ln(1 - 3x)$.

20.– **a)** $A = 1\,u^2$. **b)** $V_{OX} = \dfrac{16}{15}\pi\,u^3$. **c)** $V_{OY} = 3\pi\,u^3$.

21.– **a)** $g(0) = 0$; g' debe existir y ser continua en un entorno del origen; $g'(0) \neq 0$.

b) El vector unitario en $(0,3)$ es $\vec{\omega} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. La derivada direccional es $D_{\vec{\omega}}\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

22.– **a)** La serie converge absolutamente para $|k| < 4$. **b)** La serie diverge.

23.– **a)** $V_y = \frac{4\pi}{15}$. **b)** $A = 2\displaystyle\int_0^1 2\pi(1-y^2)\sqrt{1+4y^2}\,dy$. O bien $A = 2\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{\dfrac{5-4x}{4-4x}}\,dx$.

24.– **a)** $f(0,b) = b\,|b|\,,\ \forall b \in \mathbb{R}$. **b)** $z = -\pi\sqrt{1+\pi^2}\,x - \sqrt{1+\pi^2}\,y + 2\pi\sqrt{1+\pi^2}$.

25.– $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} = S''(x) = 2\cos 2x,\ \forall x \in (-r, r)$.

26.– **a)** $A = \dfrac{19}{3}u^2$. **b)** $V_{OX} = \pi\displaystyle\int_0^2 (-x^2+5)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (1-x)^2 dx$.

27.– No hay puntos críticos en el interior del dominio. Los extremos absolutos (en la frontera) son: mínimo absoluto en $(-\sqrt{2}, 0)$ y máximos absolutos en $(1,1)$ y $(1,-1)$.

28.– En $x = -1$ la función no existe, por lo que no tiene sentido estudiar su desarrollo. En $x = 1$, la validez del desarrollo puede justificarse de dos modos:

1) El más sencillo es calcular la suma de la serie en $x = 1$ (resulta la armónica alternada, de suma $\ln 2$), comprobando que coincide con $f(1)$, por lo que el desarrollo es válido.

2) En $x = 1$ la función f existe. Sabemos (teorema de Leibnitz) que en ese punto la serie converge. Entonces (segundo teorema de Abel) la función suma es continua en $x = 1$, por lo que su valor se obtiene como límite del valor de f cuando $x \to 1$, es decir $f(1)$.

29.– **a)** Longitud recorrida: $S = \dfrac{145^{1.5} - 1000}{135}\,km$. Tiempo empleado: $t = \dfrac{S}{12}\,seg$.

b) Longitud de la circunferencia: $l = 2\pi R = \pi\,m$. Número de vueltas: $N = \dfrac{S}{l} = \dfrac{S}{\pi}$.

30.– El valor pedido es $\dfrac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = 1$.

31.– $\mathcal{C} = (-1, 1]$. $S(x) = \ln|1 + x^3|$.

32.– Distancia $D = N \cdot S$, (N = número de vueltas, S = longitud del arco de cicloide). $N = \dfrac{l}{2\pi R} = \dfrac{v \cdot t}{2\pi R} = 3000$ vueltas. $S = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\,d\theta = \dfrac{8}{\pi} \Longrightarrow D = \dfrac{24000}{\pi}$.

33.– $E = yx^y\,(1 - \ln x \ln y)$.

34.– Sus derivadas parciales en el origen son nulas. La función cumple la condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad.

35.– Radio $r = 3$. Campo $\mathcal{C} = [2, 8]$.

36.– **a)** $A = \dfrac{74}{15}$.

b) $V_{OX} = \displaystyle\int_2^3 \pi\left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \int_2^3 \pi\left[\left(3x^3 + x^2\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x^4 + 3x^3 - 2x^2\right)^2\right]dx$.

c) $S_{OY} = \displaystyle\int_2^5 2\pi x\,dS = \int_2^5 2\pi x\sqrt{1 + (y_1')^2}\,dx = \int_2^5 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}x^3 + 9x^2 - 4x\right)^2}\,dx$.

37.– El valor máximo vendrá dado por el módulo de la derivada direccional: $\left|\vec{\nabla} z\right| = \sqrt{68}$.

38.– Su término general a_n es equivalente a $e^{a-b}\dfrac{1}{n}$. La serie diverge $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ya que $\sum \dfrac{1}{n}$ es la serie armónica, divergente.

39.– $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H,\ S_L = \pi\, R\, \sqrt{R^2 + H^2} = \pi R D$ (D es la longitud de la generatriz del cono).

40.– **a)** $k \geq 3$. **b)** $k \geq 4$. **c)** $k \geq 4$.

41.– La serie converge en $\mathcal{C} = (-2, 2)$. La función suma es $S = \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$.

42.– **a)** $A = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} y\, dy + 2\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - y^2}\, dy.$

b) $V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x \left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \pi y^2\, dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} \pi(4 - y^2)\, dy.$

c) $S = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi\sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2}\, dx + 2\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\sqrt{1 + 1^2}\, dx =$

$2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 4\pi\, dx + 4\sqrt{2}\pi\, \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2}} = 8\pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2} = \boxed{12\pi\sqrt{2}}.$

43.– **a)** Según el vector $\vec{v} = (0, 1)$. **b)** Según $\vec{v}_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ o bien $\vec{v}_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

c) La función $(T \circ \vec{\varphi})\,(t) = T\,(\vec{\varphi}(t))$ evalúa la temperatura en los puntos de la curva dada en paramétricas. El valor $(T \circ \vec{\varphi})'\,(0)$ mide la variación de la temperatura respecto al parámetro t en el punto de la curva $\vec{\varphi}(0) = (\cos 0,\ 1 + \operatorname{sen} 0) = (1, 1)$. Resulta $(T \circ \vec{\varphi})'\,(0) = -1/2$.

44.– **a)** Divergente (usando el criterio de condensación). **b)** Convergente a $S = \pi^2/6$.

45.– **a)** $P = 4\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - 4x^2}}\, dx.$

b) $A = 4\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx = 2\pi.$

c) $V = 2\displaystyle\int_0^2 \pi\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{8\pi}{3}.$

46.– La función tiene un máximo en $P_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo en $P_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

47.– **a)** La serie converge (por el criterio logarítmico o por comparación de series).

b) La serie converge si y sólo si $a \in (\infty, -e] \cup (e, \infty)$.

48.– Radio de convergencia $r = 2$. Campo $\mathcal{C} = (-2, 2)$. Función suma $S(x) = \dfrac{4}{(2 - x)^2}$.

49.– $V = 2\displaystyle\int_0^3 \pi(r_e^2 - r_c^2)\, dz = 2\int_0^3 \pi(9 - z^2)\, dz = 36\pi\, u^3.$

50.– La dirección de máximo crecimiento viene dada por el unitario $\vec{\omega} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

51.– Convergente. $S = 0$.

52.– Fijado $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, luego converge puntualmente a $f(x) = 0$.

Para hallar el supremo de $f_n(x)$ en $[0,1]$, hacemos $f_n'(x) = 0$, obteniendo $\sup f_n(x) = \dfrac{1}{en}$, que tiende a 0 si $n \to \infty$, luego la convergencia es uniforme.

53.– Las secciones $y = cte.$ son circunferencias. $V = 2\displaystyle\int_0^2 \pi\left(1 - y^2/4\right) dy = \frac{8\pi}{3}$.
Otra solución es rotar en torno a OY la elipse sección del elipsoide con el plano $z = 0$.

54.– Existe un máximo relativo en $P_1(0,0)$ y un mínimo relativo en $P_2\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

55.– **a)** Convergente. La suma vale $S = 1$ (serie telescópica).

b) Aplicando dos veces el criterio de condensación, resulta divergente.

56.– Se puede resolver cortando por planos $z = cte$ o bien calculando la diferencia de las expresiones correspondientes a cada uno de los volúmenes.

a) $V = \dfrac{49}{6}\pi\, m^3$.

b1) $C = \pi\displaystyle\int_0^2 (z^2 - 3z + 5) f(z) dz + \pi \int_2^3 (9 - 3z) f(z) dz.$

b2) $C = \pi\displaystyle\int_0^3 (9 - 3z) f(z) dz - \pi \int_0^2 (4 - z^2) f(z) dz.$

57.– La función derivada direccional tiene un mínimo relativo en $P\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}\right)$, donde vale $-\dfrac{\sqrt{5}}{9}$.

58.– La serie es absolutamente convergente para $a \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Fuera de esos intervalos no converge. Es decir, no es condicionalmente convergente para ningún valor de a.

59.– Radio $r = \dfrac{1}{2}$. Campo $C = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Suma $S(x) = -\ln(1 - 2x)$.

60.– **a)** Generamos la superficie esférica girando en torno al eje OX la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Resulta $S = 4\pi R^2$.

b) Podemos obtener el volumen cortando la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ por planos $z = cte$ o bien girando en torno a OX el área plana limitada por $x^2 + y^2 = R^2$. Resulta $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

61.– **a)** La ecuación, en la forma $F(t, x) = 0$, cumple las condiciones del T. de la función implícita.

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{(0,1)} = 1.$ **c)** $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{\cos 1}{6}.$

62.– La serie cumple las condiciones del T. de Leibnitz, por lo que converge a $S = 1 - \dfrac{3}{2}\ln 2$. Al ser divergentes las subseries positiva y negativa, la convergencia es condicional (T. Riemann).

63.– **a)** $A = \dfrac{3\pi + 2}{6}$; **b)** $V = \dfrac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7)$; **c)** $S = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$; **d)** $A_{ox} = 4\pi\sqrt{2}$.

64.– **a)** $L = xy^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$; **b)** Dimensiones: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

65.– Se puede ver que diverge de varias maneras: a) por el criterio del cociente; b) por el criterio de la raíz, aplicando la fórmula de Stirling; c) al ser de términos positivos, con $a_n \to \infty$.

66.– **a)** $A = \dfrac{17 - 6\ln 2}{12}$; **b)** $L = \dfrac{6 + \ln 2}{4}$; **c)** $S = \dfrac{31}{6}\pi$.

67.– **a)** Divergente por el criterio de condensación.

b) Convergente por el criterio logarítmico.

c) Convergente por el criterio de la raíz.

d) Convergente por el criterio de Raabe.

68.– Existe un máximo en $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo en $Q\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

69.– $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$.

70.– **a)** $V = 27\pi\, m^3$.

b) $C = \pi \int_{-3}^{0} (15 + 2z - z^2) f(z) dz$.

71.– **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, convergente; $S_p = \frac{\pi^2}{24}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, convergente; $S_i = \frac{\pi^2}{8}$.

72.– Derivando, sumando la serie geométrica obtenida e integrando, resulta: $S = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, cuyo campo de convergencia es $\mathcal{C} = (-1, 1)$.

73.– Aplicando la condición necesaria de extremos se obtienen tres puntos críticos: $P(0,0)$, $Q(0,1)$ y $R(0,-1)$. Estudiando los hessianos, resulta que $d^2 f$ es definida positiva en P e indefinida en los otros dos puntos, luego existe mínimo en P y punto de silla en Q y R.

74.– **a)** $A = 2$. **b)** $A_n = n \int_0^{\pi/n} \operatorname{sen} nx dx = 2, \forall n \in \mathbb{N}$. **c)** $V_n = \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 nx dx = \frac{\pi^2}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

75.– **a)** $P_2(x,y) = x + xy + T_2(x,y)$.

b) $P_2(0.2, 0.1) = 0.22$. Error relativo $E_r = \frac{\Delta A}{A} = \frac{0.0012}{0.2188} \approx 0.6\,\%$.

76.– Usando como Lagrangiana $L = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + \lambda(x+y+z+t-20)$ se obtiene $P(5,5,5,5)$. La matriz hessiana resulta definida positiva.

77.– **a)** $S_n = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$; **b)** $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; **c)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P_i = \infty$.

78.– **a)** $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$, elipse de semiejes 1 y 2; **b)** $S = 2\pi$; **c)** $V = 4\pi$.

79.– $r = h = 2$; $C = 8\pi$; $d^2 L\big|_{dg=0} < 0 \Longrightarrow$ máximo.

80.– Dirección dada por $\vec{u} = (0,1)$; $D_{\vec{u}} f(P) = 1$; $d^2 f(P) = 2dxdy + dy^2$.

81.– $S = 6$ (se deriva y multiplica por x dos veces la serie $\sum x^n$. Luego se hace $x = 1/2$).

82.– $A = \frac{e-2}{e}$; $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x e^{-x} dx = 1$.

83.– El primer sumando del término general corresponde a una serie telescópica. El segundo se descompone en fracciones simples. La suma resulta $S = \ln 2 - 3/4$.

84.– Volumen $V = xyz$. Diagonal $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Lagrangiana $\mathcal{L} = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - L^2)$. Resulta el cubo de lado $l = L/\sqrt{3}$.

85.– Radio $r = 1$; campo $C = [-1, 1]$; suma $S(x) = \arctan x$; $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

86.– **a)** $A_{\mathcal{R}} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} + x^2 - 2\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

b) $V_{OY} = 10\pi/3$.

c) $S_{l_1} = \pi$. Corresponde a 1/4 de la longitud de la circunferencia de radio 2, $(2\pi r/4)$.

d) $A_{OX} = 8\pi$. Corresponde a 1/2 de la superficie de una esfera de radio 2 $(4\pi r^2/2)$.

87.– Área $A = 2rh + \pi r^2/2$. Perímetro $P = 2r + 2h + \pi r = 4 + \pi$. Lagrangiana $\mathcal{L} = 2rh + \pi r^2/2 + \lambda(2r + 2h + \pi r - 4 - \pi)$. Resulta $r = h = 1$.

88.– **a)** $V = -0.2$ m/s (ver cuestión nº 46). **b)** $\dfrac{dS}{dt} = -0.4\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

89.– Radio $r = 1$. Campo $C = [0, 2]$. Suma $S = 2\ln 2$.

90.– $V = \dfrac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi$.

5. Cuestiones tipo test V-F

1.– Sea la función $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

___• Si f es continua, tiene primitiva.

___• Si f es continua a trozos, es integrable.

___• Si f es integrable, $\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f.

___• Si f es discontinua, puede tener primitiva.

2.– Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$.

___• $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x) = \int f(x)\ dx \cdot \int g(x)\ dx.$

___• Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx > 0$, entonces existe $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\ dx.$

___• $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx,\ \forall c \in \mathbb{R}.$

___• $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$

3.– Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

___• Si en $\vec{a}$ existe límite funcional, existen los direccionales y viceversa.

___• Si en $\vec{a}$ los límites direccionales existen y coinciden, existe límite funcional.

___• Si f es continua existen y coinciden los límites según cualquier trayectoria.

___• Si los límites direccionales en $\vec{a}$ dependen de la dirección, f no es continua en $\vec{a}$.

4.– Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f \in C^2$.

___• f es diferenciable.

___• Se cumple el teorema de Schwarz, de las derivadas cruzadas.

___• No podemos asegurar que la matriz hessiana sea simétrica.

___• La derivadas parciales de f son continuas.

5.– Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

___• Para que f sea diferenciable en $\vec{a}$, las derivadas parciales han de ser continuas en $\vec{a}$.

___• Si la derivada direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, f no es diferenciable en $\vec{a}$.

___• Si la derivada direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, las derivadas parciales en $\vec{a}$ son distintas siempre.

___• Si f es diferenciable en $\vec{a}$, se cumplirá: $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g}$ en $\vec{a}$.

6.– Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{a}$ interior a su dominio $D \subset \mathbb{R}^n$.

___• Si se cumple $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$ en $\vec{a}$, la función es diferenciable en $\vec{a}$.

___• Si $f \in C^2$, entonces tiene límite funcional en $\vec{a}$.

___• Si $D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = 0 \ \forall \vec{\omega}$, la función es continua en $\vec{a}$.

___• Si $f(\vec{x})$ tiene un extremo relativo en $\vec{a}$ y es diferenciable en $\vec{a}$, entonces $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

7.– Para el cálculo de extremos relativos, hemos de determinar qué tipo de forma cuadrática es la diferencial segunda de la función. Entonces

___• Si todos los menores de la matriz hessiana son negativos, la f. c. es definida negativa.

___• Si diagonalizamos la matriz hessiana obtenemos el tipo de forma cuadrática.

___• Si el determinante hessiano es nulo, la forma cuadrática es semidefinida.

___• Si la forma cuadrática es semidefinida, no existen máximos ni mínimos relativos.

8.– Indíquese cuáles de las siguientes expresiones son ciertas.

___• Sean $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$; $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y}) = \vec{\Phi}(\vec{x})$; $\vec{f}, \vec{g}$ diferenciables. Entonces, $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} = \sum \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

___• Sea $z = f(\vec{x})$. Si f es suficientemente regular, $d^p z = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right)^{(p}$.

___• Si $u = f(\vec{x})$, entonces $du^2 = d(u^2)$.

___• Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciable. Entonces, $\dfrac{d\vec{f}^{-1}(\vec{x})}{d\vec{x}} = \left[\dfrac{d\vec{f}(\vec{y})}{d\vec{y}} \right]^{-1}_{\vec{y} = \vec{f}^{-1}(\vec{x})}$.

9.– Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

___• Si existe $\vec{\nabla} f$ en un punto, es perpendicular a la superficie en dicho punto.

___• Si existe $\vec{\nabla} f$ en un punto, nos indica la dirección del plano XY en que f crece más rápido, a partir de dicho punto.

___• Si f es diferenciable, las componentes de $\vec{\nabla} f$ son las derivadas parciales de f.

___• $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$ es condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad.

10.– Sea la función $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$. En el $(0, 0)$, la función

___• Tiene un máximo.

___• Tiene un mínimo.

___• No tiene ni máximo ni mínimo.

___• No cumple la condición necesaria de extremo.

11.– Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que $F(x,y)=0$ define a y como función implícita de x en X si y sólo si $\forall x \in X\ \exists \psi(x) /\ F(x,\psi(x))=0$. Entonces

___• Es condición necesaria para que exista función implícita que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ sea continua.

___• Para que exista función implícita en un entorno de (a,b), es condición suficiente que F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sean continuas y $F(a,b)=0$.

___• Si $F(x,y)=x^2+y^2+1$, no existe función implícita.

___• Si existe función implícita, se cumple: $\dfrac{d\psi}{dx}=-\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$

12.– Sean la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f \in C^2$ y el punto $P\,(a,b,f(a,b)) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

___• $z=f(a,b)$ es la ecuación de un plano horizontal.

___• La ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto P es $z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$.

___• La matriz hessiana de f es simétrica.

___• No podemos asegurar que f sea dos veces diferenciable.

13.– Sea f una función de varias variables y g una condición de ligadura.

___• Si f tiene un extremo relativo en $\vec{a}$, el extremo se mantiene cuando imponemos g.

___• Si f tiene un extremo relativo condicionado en $\vec{a}$, entonces f (sin ligadura) tiene también un extremo relativo en ese punto.

___• Cuando la forma cuadrática d^2L es definida, no es preciso utilizar la restricción $dg=0$.

___• Si la forma cuadrática d^2L es indefinida, puede convertirse en definida con la restricción $dg=0$.

14.– Sean $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x});\ \vec{z}=\vec{g}(\vec{y})=\vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right)=(\vec{g}\circ\vec{f})(x)$.

___• Es condición necesaria y suficiente que $\vec{f}$ y $\vec{g}$ sean diferenciables para que $\vec{g}\circ\vec{f}$ lo sea.

___• Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ tienen derivadas parciales, se cumple la regla de la cadena.

___• Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ tienen derivadas parciales, $\vec{g}\circ\vec{f}$ es diferenciable.

___• Si $\vec{g}\circ\vec{f}$ no es diferenciable, al menos una de las dos funciones no lo es.

15.– Si la serie de términos positivos $\sum a_n$ es divergente, la serie $\sum (a_n)^{\alpha},\ \alpha>1$

___• Es divergente.

___• Es convergente.

___• Puede ser convergente o divergente.

___• Puede ser oscilante.

16.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión oscilante. Se cumplirá que

___• Su término general no tiende a 0.

___• Es de términos positivos y negativos.

___• La serie $\sum a_n$ es absolutamente divergente.

___• Podemos calcular el carácter de $\sum a_n$ mediante el Teorema de Leibnitz.

17.– Una serie tiene como término general el infinitésimo a_n, cuyo signo es alternativamente positivo y negativo. Entonces

___• La serie es absolutamente convergente.

___• Si $\forall n \, |a_n| < |a_{n-1}|$, la serie es convergente.

___• Si $\exists n / |a_m| < |a_{m+1}| \; \forall m \geq n$, la serie es convergente.

___• La serie es convergente pero no absolutamente convergente.

18.– La convergencia de una serie de término general $\dfrac{P_k(n)}{r^n}$, $r \in \mathbb{R}$

___• No depende de los coeficientes del polinomio $P_k(n)$.

___• No depende de r.

___• Depende del grado del polinomio $P_k(n)$.

___• Este tipo de series converge siempre.

19.– Si al aplicar el criterio de D'Alembert a $\sum a_n$, se obtiene un valor de $l = -1$,

___• La serie es convergente.

___• La serie es divergente.

___• La serie es absolutamente divergente.

___• El criterio ha sido incorrectamente aplicado.

20.– Si la serie de término general a_n es absolutamente convergente, la de término general $\dfrac{1}{a_n}$

___• Puede converger o diverger.

___• Es convergente.

___• Es absolutamente convergente.

___• No es convergente.

21.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos, tales que $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, verificándose que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie $\sum a_n$

___• Es divergente.

___• Converge sólo si es geométrica de razon menor que uno.

___• Es convergente.

___• Puede converger o diverger.

22.– Sea $\{f_n\}$ una sucesión funcional definida en todo $\mathbb{R}$.

___• Dado $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión numérica.

___• Si para cada $x \in \mathbb{R}$ podemos obtener $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \phi(x)$, decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a ϕ.

___• Si las funciones f_n son continuas y convergen a una función no continua, la convergencia no es uniforme.

___• Si la sucesión $\{f_n\}$ es convergente $\forall x \in \mathbb{R}$, la serie de término general f_n también lo es.

23.– Sea la sucesión funcional $\{f_n\}$, definida en $I \subset \mathbb{R}$. Sea $F_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$. La serie $\sum f_n$

___• Es la sucesión de sumas parciales $\{F_n\}$.

___• Converge en I si, $\forall x \in I$, se cumple: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, |F_p(x) - F_q(x)| < \varepsilon\ \forall p, q \geq n$.

___• Converge uniformemente en $I \subset \mathbb{R}$ si $\sum f_n$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos, convergente.

___• Converge siempre que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in I$.

24.– Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$ y sea r su radio de convergencia, calculado por el Teorema de Cauchy-Hadamard, utilizando el criterio de la raiz n-ésima. Podemos afirmar que

___• Utilizando el criterio del cociente se obtiene el mismo radio de convergencia.

___• El campo de convergencia será de la forma $(-r, r)$ o, si no, de la forma $[-r, r]$.

___• r puede valer 0 ó ∞.

___• La expresión $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe siempre.

25.– Sea A el conjunto de números complejos cuyo argumento cumple $\theta^2 = a \in \mathbb{R}$. Entonces el lugar geométrico de los afijos de los elementos de A será

___• Una recta de pendiente $\tan a$.

___• Dos rectas simétricas respecto al eje X, de inclinación $\pm\frac{a}{2}$ radianes.

___• Dos rectas verticales de ecuación $x = \pm\sqrt{a}$.

___• Una hipérbola equilátera.

26.– Sea el complejo $z = a + bi$. Se verifica

___• $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

___• $\dfrac{z \cdot \overline{z}}{|z|} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

___• La parte imaginaria de z^2 vale $2ab$.

___• La parte real de e^z vale $e^b \cos a$.

27.– Sea z un número complejo no nulo.

___• Su inverso tiene el mismo argumento que su conjugado.

___• El conjugado de su cuadrado es igual al cuadrado de su conjugado.

___• Su potencia n-sima cumple: $z^n = \rho^n(\cos^n \theta + i \operatorname{sen}^n \theta)$.

___• La expresión $\sqrt[n]{z}$ representa un conjunto de n complejos, de afijos equiespaciados en una circunferencia de radio $|z|$.

---

6. Soluciones a las cuestiones tipo test

Ejercicio	Respuestas válidas
1	a, b, d
2	d
3	c, d
4	a, b, d
5	Ninguna
6	b, d
7	b
8	a, b, d
9	b, c
10	c
11	c
12	a, b, c
13	c, d
14	d
15	c
16	a, c
17	b
18	a
19	d
20	d
21	d
22	a, c
23	a, b
24	c
25	Ninguna
26	a, b, c
27	a, b