Continuidad, derivación e integración de una serie de potencias (16.04.2024)

Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia $r > 0$, y sea $S(x)$ su suma. Se cumple:

a) $S(x)$ es continua en todo $x \in (-r, r)$.

b) $S(x)$ es derivable en todo $x \in (-r, r)$ siendo su derivada $S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.

c) $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$. Su integral es $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Demostración.

a) Lo demostramos en dos partes.

a.1) $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en todo compacto $[-\rho, \rho] \subset (-r, r)$.

Al ser $0 < \rho < r$, la serie converge absolutamente para $x = \rho$, es decir $\sum |a_n \rho^n|$ es convergente (T. de Cauchy-Hadamard).

Entonces, $\forall x / \, |x| \leq \rho$, se cumple $|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n|$, por lo que $\sum a_n x^n$ tiene como mayorante a una serie numérica de términos positivos convergente. Luego, por el teorema de Weierstrass, es uniformemente convergente en $[-\rho, \rho]$.

a.2) Para todo $x \in (-r, r)$ podemos encontrar un ρ tal que

$$-r < -\rho < x < \rho < r$$

(por ej., si $x > 0$, $\rho = (x + r)/2$).

Como acabamos de ver, la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-\rho, \rho]$. Al ser las funciones $a_n x^n$ continuas $\forall x$, la suma $S(x)$ será continua en todo $x \in (-r, r)$ (apdo. **2.4.**).

Nota: Al enunciar los Teoremas de Abel se verá que, si la serie converge en $x = r$ ó $x = -r$, $S(x)$ será continua también en esos puntos, no sólo en $(-r, r)$.

b) Sea la serie de derivadas $\sum n a_n x^{n-1}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

su radio de convergencia coincide con el de $\sum a_n x^n$, luego ambas series convergen uniformemente en los mismos intervalos.

Como $\sum a_n x^n$ converge al menos en $x = 0$ y sus sumandos son funciones derivables, entonces la suma $S(x)$ de $\sum a_n x^n$ es derivable en $(-r, r)$ y se cumple que la derivada de la suma es la suma de la serie de las derivadas (apdo. **2.6.**)

$$S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$$

c) Sea la serie de integrales (entre 0 y x) $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Como el radio de convergencia de su serie derivada $\sum a_n x^n$ es r, el suyo será también r, como acabamos de ver.

Como $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$, (apdo. a.1) y sus sumandos son funciones integrables, entonces la función suma $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$ y se cumple (apdo. **2.5.**)

$$\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$