Integración de una serie de funciones (18.04.2022)

Sea $I = [a, b]$. "*Si una serie* $\sum f_n$*, de funciones integrables en* I*, converge uniformemente en* I *a su función suma* F*, ésta es integrable en* I *y su integral es la suma de la serie de integrales*".

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \Longrightarrow \int_a^x F(t)dt \overset{\text{c.u.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)dt, \quad x \in [a, b]}$$

La convergencia de la serie de las integrales es uniforme, por lo que lo anterior puede también expresarse diciendo que: "si la serie de funciones converge uniformemente a F, la serie de las integrales converge uniformemente a la integral de F".

D: Lo demostraremos para el caso de funciones f_n continuas (por tanto integrables).

Sea la serie $\sum f_n$, de f_n continuas, que converge uniformemente a F en I. Tanto $F_n = \sum_1^n f_i$ como F son funciones continuas (apdo. 2.4), luego el resto $R_n = F - F_n$ será también continua y por tanto integrable. Entonces

$$\int_a^x F(t)dt = \int_a^x F_n(t)dt + \int_a^x R_n(t)dt, \quad \forall x \in I$$

Al ser F_n una suma de funciones integrables, su integral será la suma de las integrales y la expresión anterior se convierte en

$$\int_a^x F(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)dt + \int_a^x R_n(t)dt \tag{1}$$

Queremos demostrar que la integral de la suma de la serie $\sum f_n$ es la suma de la serie de las integrales de las f_n, es decir el límite de la suma parcial, cuando $n \to \infty$. Para ello veamos que la integral de R_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

En efecto, como F_n converge uniformemente a F, se cumple

$$\forall \varepsilon \, \exists n(\varepsilon) \, / \, |R_n(t)| = |F(t) - F_n(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{2}$$

con lo que

$$\left| \int_a^x R_n(t)dt \right| \leq \int_a^x |R_n(t)dt| < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon$$

Tomando límites en (1), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x F(t)dt \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_a^x f_i(t)dt + \int_a^x R_n(t)dt \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)dt$$

Y como el término entre paréntesis del primer miembro no depende de n,

$$\int_a^x F(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)dt$$

Nota: obsérvese que el n calculado en (2) depende sólo de ε, por lo que la serie de las integrales converge uniformemente a la integral de la suma de la serie.

Derivación de una serie de funciones (18.04.2022)

Sea $I = [a, b]$. "*Dada una serie* $\sum f_n$*, de funciones derivables en* I*, que converge en un punto de* I*, tal que* $\sum f_n'$ *converge uniformemente en* I*, entonces* $\sum f_n$ *c. u. en* I *a su función suma* F*, que es derivable en* I *y su derivada es la suma de la serie de derivadas*".

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = F(x_0) \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{\text{c.u.}}{=} G(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \ \text{ y } \ F'(x) = G(x)}$$

D: Lo demostraremos para el caso de funciones f_n con derivada f_n' continua.

Sea la serie $\sum f_n$, de f_n derivables, tales que las f_n' son continuas. Como $\sum f_n'$ converge uniformemente en I a G, ésta será continua (apdo. 2.4).
Al ser las f_n' continuas, son integrables. Entonces, a partir de lo visto en el apartado anterior, G es integrable y su integral es la suma de la serie de las integrales. Por lo tanto, dado $x_0 \in I$, $\forall x \in I$ se cumplirá

$$\int_{x_0}^{x} G(t)dt \overset{\text{c.u.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right)$$

Al ser G integrable, la serie $\sum (f_n(x) - f_n(x_0))$ converge (uniformemente) a la integral de G. Por otro lado, al ser convergente la serie numérica $\sum f_n(x_0)$, convergerá también la serie suma de ambas $\sum f_n(x)$. Llamando $F(x)$ a la suma de esta última, resulta

$$\int_{x_0}^{x} G(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = F(x) - F(x_0)$$

Derivando ahora respecto a x y aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo resulta

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} G(t)dt = G(x) = (F(x) - F(x_0))' = F'(x)$$

Es decir, $F'(x) = G(x)$ o, lo que es lo mismo,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$