Sucesión de funciones continuas (20.02.2023)

Propiedad: "*Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones f_n, definidas en I. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I y las f_n son continuas en I, entonces f es continua en I*".

Demostración: Hemos de probar que, para todo punto a de I, se cumple

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{1}$$

- Por la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; / \; |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \; \forall m \geq n_0, \forall x \in I \tag{2}$$

- Por la continuidad de las funciones f_n en I sabemos que, $\forall a \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \; \forall m \in \mathbb{N} \tag{3}$$

- Entonces, dado ε, obtenemos $n_0(\varepsilon)$ en (2) y elegimos un m cualquiera tal que $m \geq n_0$. Ahora, a partir de ε y la condición (3), de continuidad de f_m en a, obtenemos δ.

- Así pues, dado ε, existen m y δ tales que se cumplen las dos condiciones al tiempo. Como resultado, se cumple la condición (1).

  En efecto, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(a)| = |(f(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - f_m(a)) + (f_m(a) - f(a))| \leq$$
$$\underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{(2)} + \underbrace{|f_m(a) - f(a)|}_{(3)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

  donde

  - (1) y (3) son menores que $\varepsilon/3$ por la continuidad uniforme de $\{f_n\}$.
  - (2) es menor que $\varepsilon/3$ por la continuidad de f_m en a.