Ejercicios resueltos de suma de series (26.12.2017)

a) Descomposición de $\sum a_n$ en suma o diferencia de series convergentes.

Utilizamos la P.5 de las series: *"La combinación lineal de series convergentes es convergente y su suma es la c. l. de las sumas"*. Si al descomponer el término general de la serie resulta $a_n = b_n \pm c_n$, donde b_n y c_n corresponden a series convergentes de sumas S_b y S_c, la serie estudiada será combinación lineal de $\sum b_n$ y $\sum c_n$. Entonces su suma será $S_a = S_b \pm S_c$.

Ej. 1.- Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$, tomando como dato $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Descomponemos $2n^2+2n+1 = n^2+2n+1+n^2 = (n+1)^2+n^2 \Longrightarrow a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\text{Entonces } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

Ej. 2.- Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Observamos que $a_n = \cdots = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\text{Por lo tanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 1.$$

Nota 1.: En ambos ejercicios es fácil, antes de descomponer el término general, ver que la serie converge ($a_n \sim \dfrac{2}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$). Pero no es imprescindible hacerlo, pues ambas se descomponen en suma o diferencia de convergentes, luego serán convergentes.

Nota 2.: El Ej. 2. puede también resolverse como serie telescópica.

b) Descomposición de a_n en suma o diferencia de series divergentes.

Si varios de los términos en que se descompone a_n corresponden a series divergentes, no podemos sumarlos por separado, sino que hay que estudiar una suma parcial de a_n. En el siguiente ejemplo se utiliza la serie armónica.

Ej. 3.- Obtener $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-n}$. Descomponemos el t$^{\text{o}}$ general: $a_n = \dfrac{3/2}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1/2}{n+1}$.

La suma parcial vale:

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{3/2}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1/2}{n+1}\right) = \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} - 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - 2\left(H_n - 1\right) + \frac{1}{2}\left(H_n - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2}\right) H_n - \frac{3}{2}\frac{1}{n} + 2 - \frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = -\frac{3}{2n} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2n+2} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{4}}$$

Ejercicio propuesto: Calcular $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$. Solución: $S = \dfrac{1}{4}$.