Cálculo de extremos condicionados. Ejemplo (01.01.2023)

Se pide hallar los extremos de la función $V = x + y + 2z$ con las condiciones:

$$3x^2 + y^2 = 12; \quad x + y + z = 2.$$

- Función lagrangiana: $L = V + \lambda g_1 + \mu g_2 = x + y + 2z + \lambda(3x^2 + y^2 - 12) + \mu(x + y + z - 2)$.

- Condición necesaria de extremo:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 6x\lambda + \mu = 0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda + \mu = 0. \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + \mu = 0. \tag{3}$$

$$g_1 = 3x^2 + y^2 - 12 = 0. \tag{4}$$

$$g_2 = x + y + z - 2 = 0. \tag{5}$$

  Restando (1) a (2) y teniendo en cuenta que $\lambda \neq 0$, obtenemos: $y = 3x$.

  De (3) resulta el valor $\mu = -2$.

  Introduciendo $y = 3x$ en (4) y (5) obtenemos dos posibles extremos, cada uno correspondiente a un valor de λ: $P_1(1, 3, -2)$, $\lambda_1 = 1/6$; $P_2(-1, -3, 6)$, $\lambda_2 = -1/6$.

- Los hessianos en ambos puntos son:

$$H_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SDP}; \quad H_{P_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SDN}.$$

  Al ser matrices semidefinidas, estudiamos la diferencial segunda, $d^2L\big|_{dg_i=0}$.

- Punto P_1:

$$d^2L = dx^2 + \frac{1}{3}dy^2. \tag{6}$$

$$dg_1 = 0 \Longrightarrow 6xdx + 2ydy \overset{P_1}{=} 6dx + 6dy = 0 \Longrightarrow dx + dy = 0. \tag{7}$$

$$dg_2 = 0 \Longrightarrow dx + dy + dz = 0. \tag{8}$$

  De (7) y (8) resulta $dz = 0$, por lo que será no nulo dx o dy (al menos uno de ellos). Entonces la expresión (6) es siempre positiva, por lo que en P_1 existe un mínimo.

- Punto P_2:

$$d^2L = -dx^2 - \frac{1}{3}dy^2. \tag{9}$$

$$dg_1 = 0 \Longrightarrow 6xdx + 2ydy \overset{P_2}{=} -6dx - 6dy = 0 \Longrightarrow dx + dy = 0. \tag{10}$$

$$dg_2 = 0 \Longrightarrow dx + dy + dz = 0. \tag{11}$$

  De (10) y (11) resulta $dz = 0$, por lo que (como en el caso de P_1) será no nulo dx o dy. Entonces la expresión (9) es siempre negativa, por lo que en P_2 existe un máximo.