Teorema de la f. implícita. Ejemplos (01.01.2023)

1.- Sea $g(x,y,z) = z^3 + 2xyz + x$. Se pide demostrar que la ecuación $g = 0$ define a z como función implícita de x e y, $z = \psi(x,y)$, en un entorno de $P(1,-1,1)$, así como obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \psi(x,y)$ en dicho punto.

a) La función g y sus derivadas son continuas, por ser polinómicas:
$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy+1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2xz, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 3z^2 + 2xy.$$

b) Se cumple $g(1,-1,1) = 0$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,-1,1) = 1 \neq 0$.

Luego existe $z = \psi(x,y)$, diferenciable, en un entorno de P (apdo. **10.2**).

A partir de las derivadas of g, obtenemos las derivadas de ψ respecto a x e y:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P = -1, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P = 2 \implies \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_P = -\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P = 1, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_P = -\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P = -2,$$

que nos permiten calcular la ecuación del plano tangente:

$$z = \psi|_P + \frac{1}{1!}\left(\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_P (x-1) + \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_P (y+1)\right) = 1 + (x-1) - 2(y+1).$$

2.- Sean $g_1(x,y,z) = x^2 + xy + z$ y $g_2(x,y,z) = x + y^2 - z^2$. Se pide demostrar que la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$ define las funciones implícitas $y = \psi_1(x)$, $z = \psi_2(x)$ en un entorno de $P(-1,1,0)$. Calcúlense las derivadas de ψ_1 y ψ_2 respecto a x, en P.

a) D. parciales: $\dfrac{\partial g_1}{\partial x} = 2x+y, \quad \dfrac{\partial g_1}{\partial y} = x, \quad \dfrac{\partial g_1}{\partial z} = 1, \quad \dfrac{\partial g_2}{\partial x} = 1, \quad \dfrac{\partial g_2}{\partial y} = 2y, \quad \dfrac{\partial g_2}{\partial z} = -2z.$

b) Tanto g_1 y g_2 como sus d. p. respecto a x, y y z son continuas, por ser polinómicas.

c) Se cumple $\vec{g}|_P = \vec{0}$; $\quad \left|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial(y,z)}\right|_P = \left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{array}\right|_P = \left|\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0.$

Entonces existe la función implícita $\vec{\psi}(x)$, diferenciable (apdo. **10.3**), y se verifica:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{d\psi_1}{dx} \\ \dfrac{d\psi_2}{dx} \end{array}\right\}_P = -\left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial(y,z)}\right]^{-1} \left\{\frac{\partial \vec{g}}{\partial x}\right\}_P = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left\{\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -1/2 \\ 1/2 \end{array}\right\}.$$

Nota. Este resultado puede también obtenerse resolviendo un sistema de ecuaciones:

$g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi_1(x) = 0$; $g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi_2(x) = 0$. Derivando ϕ_1 y ϕ_2:

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} = (2x+y) + x\,\frac{d\psi_1}{dx} + 1\,\frac{d\psi_2}{dx} = 0$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} = 1 + 2y\,\frac{d\psi_1}{dx} - 2z\,\frac{d\psi_2}{dx} = 0.$$

En P: $\; -1 - \left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P + \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_P = 0; \;\; 1 + 2\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P - 0 = 0 \implies \boxed{\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P = -\dfrac{1}{2}; \;\; \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_P = \dfrac{1}{2}}$