

Problema de extremos con 2 variables (02.03.2020)

Se pide calcular los extremos de la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \text{sen}(x + y) - \cos(x - y)$, siendo el dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

- 1) Estudiamos primero el **interior del dominio** ($0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$). La condición necesaria de extremo es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x + y) + \text{sen}(x - y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x + y) - \text{sen}(x - y) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Condición suficiente: calculando las derivadas segundas, obtenemos el hessiano

$$H_P = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a una f. c. indefinida, por lo que se trata de un punto de silla.

- 2) Estudio de la **frontera**. Sean los puntos $A(0, 0)$, $B(0, \pi/2)$, $C(\pi/2, 0)$, $D(\pi/2, \pi/2)$. En cada segmento determinado por dos de ellos, f se convierte en una función de una variable, a la que primero buscamos puntos de derivada nula y luego calculamos el valor en los extremos del segmento (lo haremos de una sola vez al final).

- En AC , $y = 0 \Rightarrow f = \text{sen } x - \cos x \Rightarrow f' = \cos x + \text{sen } x$. La ecuación $f' = 0$ no tiene solución para $x \in [0, \pi/2]$.
- En BD , $y = \pi/2 \Rightarrow f = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x - \text{sen } x \Rightarrow f' = -\text{sen } x - \cos x$. Tampoco existe solución para $f' = 0$ en $x \in [0, \pi/2]$.
- En AB , $x = 0 \Rightarrow f = \text{sen } y - \cos y$ (idéntico al caso a).
- En CD , $x = \pi/2 \Rightarrow f = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ (id. al caso b).

Los valores de f en los 4 extremos son: $f_A = f_D = -1$; $f_B = f_C = 1$.

- 3) Entonces la función f , en el dominio considerado, tiene un punto de silla en $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, así como dos máximos relativos en los puntos B y C y dos mínimos relativos en los puntos A y D . Estos extremos relativos son también absolutos en sentido amplio (\leq).

