Ejemplo de f. c. semidefinida (caso dudoso)

Se pide estudiar los extremos de $f(x,y) = x^2 + ky^4$, en función del signo de k.

a) Aplicamos la C. N. de extremo, $\nabla f = \vec{0}$, de la que obtenemos el punto crítico $P(0,0)$.

b) Calculamos la diferencial segunda en $P(0,0)$. La única derivada segunda no nula (f''_{xx}) vale 2, mientras que $f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = 0$. Así pues, $d^2f(0,0) = 2dx^2 \geq 0$.

La diferencial segunda de f resulta ser una forma cuadrática semidefinida positiva.

c) Sin embargo, según el signo que demos a k, obtenemos distintos resultados:

c.1. Para $k > 0$, la función alcanza un **mínimo** relativo (y absoluto) en $P(0,0)$.

c.2. Para $k = 0$, la función se convierte en $z = x^2$ (cilindro parabólico), que tiene un **mínimo en sentido amplio** a lo largo de toda la recta $x = 0$ (eje Y).

c.3. Para $k < 0$, la función se convierte en $z = x^2 - |k|\, y^4$. Si, a partir de $P(0,0)$, nos movemos por el eje X, f crece. Si lo hacemos por el eje Y, la función decrece. Concluimos que en $P(0,0)$ no hay máximo ni mínimo (es un **punto de silla**).

En las figuras siguientes se representan, en este orden, los casos $k = 1$ (mínimo estricto), $k = 0$ (mínimo en sentido amplio), $k = -1$ (punto de silla).