Obtención del jacobiano de la función inversa (25.01.2022)

Funciones de una variable. El modo práctico que utilizamos para obtener la derivada de la función f^{-1}, inversa de f, es el siguiente:

$$y = f^{-1}(x) \Longrightarrow x = f(y) \Longrightarrow 1 = f'(y)\, y' \Longrightarrow y' = \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)}$$

Es decir, "la derivada de la función f^{-1}, inversa de f, es el inverso de la derivada de f".

Funciones vectoriales. Consideramos una función $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Su inversa será $\vec{y} = \vec{f}^{-1}(\vec{x})$, de donde $\vec{x} = \vec{f}(\vec{y})$. Derivamos ambos miembros respecto de $\vec{x}$. El primero es la función identidad $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{x}$, cuya derivada respecto a $\vec{x}$ será la matriz unidad:

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = I$$

Aplicamos al segundo miembro la regla de la cadena, obteniendo $\dfrac{d\vec{f}(\vec{y})}{d\vec{x}} = \dfrac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\dfrac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}}$, por lo que

$$I = \frac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}} = \left[\frac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\right]^{-1}_{\vec{y}=\vec{f}^{-1}(\vec{x})}}$$

Es decir, "el jacobiano de la función inversa de $\vec{f}$ es la matriz inversa del jacobiano de $\vec{f}$ ".

Ejemplo. Relación entre polares y cartesianas. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \end{Bmatrix} = \vec{f}(x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho = f_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \theta = f_2(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Sea su inversa $\vec{f}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \vec{f}^{-1}(\rho,\theta)$, con $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

Veremos que los jacobianos de $\vec{f}$ y f^{-1} son matrices inversas entre sí. El de $\vec{f}^{-1}$ es

$$\frac{d\vec{f}^{-1}}{d(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

El jacobiano de f resulta

$$\frac{d\vec{f}}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

que, en función de las variables (ρ,θ), se convierte en $\begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} & \dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$. Es inmediato comprobar que el producto de ambos es la matriz unidad.