Ejercicios de límites (12.04.2021)

1) Calcular el límite en $\vec{a}=(0,0)$ de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} & x^2\neq y^2\\ 0 & x^2=y^2.\end{cases}$

Calculamos el límite direccional, según la dirección del vector unitario $\vec{\omega}$:

$$\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a}+\lambda\vec{\omega})=\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2({\omega_x}^2+{\omega_y}^2)}{\lambda^2({\omega_x}^2-{\omega_y}^2)}=\frac{1}{{\omega_x}^2-{\omega_y}^2}$$

que depende de la dirección, por lo que no existe límite funcional.

2) Calcular el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0.\end{cases}$

Límite direccional: $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^2{\omega_x}^2}{\lambda\,\omega_y}=0,\ \forall\omega_y\neq 0.$

Para $\omega_y=0$ (eje OX) la función es nula, luego su límite vale 0. Entonces todos los límites direccionales coinciden, por lo que puede existir límite funcional.

Sin embargo, si nos acercamos al origen por cualquier parábola $y=kx^2,\ k\neq 0$, es decir por puntos de coordenadas (x,kx^2), con valores de x tendiendo a 0, la función toma en todos ellos el valor $1/k\neq 0$, por lo que no existe límite funcional.

3) Calcular el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0).\end{cases}$

Límite direccional: $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda^2\omega_x^2\lambda\,\omega_y}{\lambda^2\omega_x^2+\lambda^2\omega_y^2}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{2\lambda^3\omega_x^2\,\omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)}=\lim_{\lambda\to 0}2\lambda\omega_x^2\,\omega_y=0.$

Los límites direccionales existen y son nulos, por lo que, si existe límite funcional, será nulo también. Para calcularlo usamos coordenadas polares $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si $\rho\to 0$, nos estamos acercando al $(0,0)$ por cualquier camino. Obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}2\rho\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

luego existe límite funcional y, como preveíamos, es nulo.

4) Calcular el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0).\end{cases}$

Sol. No existe límite funcional pues no existen los direccionales, salvo en la dirección OX.

5) Calcular el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{y^2+x} & y^2+x\neq 0\\ 1 & y^2+x=0.\end{cases}$

Sol. Aunque los direccionales existen y coinciden, no existe límite funcional (ver ej. **2**).

6) Calcular el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}xy\left(\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}+\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{y}\right) & x\cdot y\neq 0\\ 0 & x\cdot y=0.\end{cases}$

Sol. Vale 0 (ver ej. **3**).