Demostración de tres desigualdades (08.02.2024)

Sean los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de un espacio vectorial $\mathbb{R}^p$. Vamos a demostrar tres propiedades:

- La desigualdad de Cauchy-Schwarz relaciona el producto escalar de los vectores con el producto de sus normas.
- La desigualdad triangular de la norma, que utiliza la anterior, establece que la norma de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de sus normas.
- Por último, la desigualdad triangular de la distancia se demuestra a partir de la desigualdad triangular de la norma.

1) Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\boxed{|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$

Si $\vec{x}=\vec{0}$, ambos miembros se anulan y se verifica la igualdad.

Si $\vec{x}\neq\vec{0}$, definimos el vector $\lambda\vec{x}+\vec{y}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Por la positividad del producto escalar, se cumplirá

$$(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y}) \geq 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Operando la expresión anterior, se convierte en

$$\lambda^2\|\vec{x}\|^2 + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \geq 0$$

Si hacemos

$$A=\|\vec{x}\|^2, \quad B=2(\vec{x}\cdot\vec{y}), \quad C=\|\vec{y}\|^2$$

nos queda la expresión de un trinomio de segundo grado en λ, que toma sólo valores no negativos:

$$A\lambda^2+B\lambda+C\geq 0$$

Entonces el trinomio tiene a lo sumo una raíz real (de tener dos, su valor sería negativo entre ambas, pues el coeficiente $A>0$).

Recordando la fórmula para el cálculo de las raíces de la ecuación de segundo grado, lo anterior significa que el discriminante B^2-4AC ha de ser menor o igual que 0. Entonces

$$B^2-4AC = 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0 \Longrightarrow 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq 4\|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2$$

Simplificando y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, llegamos a la expresión buscada.

2) Desigualdad triangular de la norma: $\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|}$

Para demostrar esta desigualdad, daremos los pasos siguientes:

a) Partimos del cuadrado de la norma del vector $\vec{x}+\vec{y}$ –igual al producto escalar del vector por sí mismo– y desarrollamos este producto.

b) Tenemos en cuenta que $\vec{x}\cdot\vec{y}\leq|\vec{x}\cdot\vec{y}|$, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (**1**) y reconocemos la expresión del cuadrado de una suma.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y}) \leq$$
$$\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\,|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

Por tanto

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada, resulta la expresión que queríamos demostrar.

3) Desigualdad triangular de la distancia: $\boxed{d(\vec{x},\vec{z}) \leq d(\vec{x},\vec{y})+d(\vec{y},\vec{z})}$

Se demuestra a partir de la definición de distancia y la desigualdad triangular de la norma (**2**):

$$d(\vec{x},\vec{z}) = \|\vec{x}-\vec{z}\| = \|(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z})\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|+\|\vec{y}-\vec{z}\| = d(\vec{x},\vec{y})+d(\vec{y},\vec{z})$$