Apuntes de dibujo de curvas (10.02.2023)

El objetivo de estas notas es dar unas nociones básicas sobre dibujo de curvas definidas por medio de ecuaciones cartesianas –explícitas o paramétricas– y polares:

1. Curvas en cartesianas explícitas

La ecuación cartesiana explícita de una curva es de la forma $y = f(x)$, donde f es una función. Para representar curvas de este tipo es útil estudiar los aspectos siguientes.

1.1. Dominio

El primer paso suele consistir en determinar el dominio o campo de existencia, identificando los puntos en que f no está definida. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$, la función no existe para valores de $x \in (-2, 1)$.

1.2. Ceros y simetrías

a) Se buscan los valores de x que anulan $f(x)$, en los cuales la curva corta al eje OX.

b) Si $f(-x) = f(x)$ (f par), la curva es simétrica respecto al eje OY. Ej. $y = \cos x$.

c) Si $f(-x) = -f(x)$ (f impar), la curva es simétrica respecto al origen O. Ej. $y = x^3$.

1.3. Asíntotas

Una asíntota es una recta a la que la curva se aproxima tanto como queramos, sin llegar a tocarla (tangente en el infinito). Pueden ser de tres tipos.

a) **Vertical.** Se dan si $f(x) \to \pm\infty$, cuando $x \to a$. Suelen corresponder a valores de x que anulan el denominador de $f(x)$. Ejemplo: $y = (x^2 - 4)^{-1}$ tiene asíntotas en $x = \pm 2$.

Tienen también asíntotas verticales las curvas de ecuación $y = \ln x$, en $x = 0^+$, e $y = \tan x$, en $x = (2k-1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) **Horizontal.** Existe una asíntota horizontal si $f(x) \to b$, cuando $x \to \pm\infty$. Ejemplo: en la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, la asíntota es el eje OX, pues $y \to 0^\pm$ cuando $x \to \pm\infty$.

c) **Inclinada.** Tenemos una asíntota inclinada de ecuación $y = mx + n$ si, cuando $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$ (o bien a $\mp\infty$) y se cumple además

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = m \in \mathbb{R}; \qquad \lim_{x\to\pm\infty} y - mx = n \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, la curva de ecuación $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ tiene como asíntota a $y = 2x + 1$.

1.4. Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Estudiamos los valores de las derivadas primera y segunda de f, resultando:

a) **Máximo.** Si $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$, la función tiene un máximo relativo en $x = x_0$.

b) **Mínimo.** Si $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

c) **Punto de inflexión.** Si $f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$, existe un punto de inflexión en $x = x_0$.

1.5. Caso particular de funciones racionales

La función $f(x)$ viene dada por un cociente de polinomios $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

a) **Ceros.** Los ceros de $f(x)$ son las raíces de $P(x)$.

b) **Asíntotas.** La curva tendrá una asíntota vertical en los puntos correspondientes a las raíces de $Q(x)$. Si el orden de multiplicidad de la raíz es par, no habrá cambio de signo de $f(x)$ a los lados de la asíntota y sí lo habrá si el orden es impar.

   Ejemplos: la curva $y = (x-1)^{-2}$ posee en $x = 1$ una asíntota vertical sin cambio de signo, mientras que $y = (x-2)^{-3}$ tiene una, en $x = 2$, con cambio de signo.

1.6. Ejemplos resueltos y propuestos

a) Estudia la curva de ecuación $y = x(x^2-1)^{-1}$. Comprueba que tiene simetría respecto al origen de coordenadas y posee dos asíntotas verticales y una horizontal.

b) Estudia la curva dada por $y = (x^2+x-2)(x-2)^{-1}$. Comprueba que tiene dos ceros, extremos en $x = 0$ y $x = 4$, una asíntota vertical y otra inclinada.

c) Estudia la curva dada por $y = x + x^{-1}$. Comprueba que tiene extremos en $x = \pm 1$, una asíntota vertical y otra inclinada. Obsérvese que la curva posee simetría polar.

d) Estudia la curva de ecuación $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, observando que tiene una asíntota vertical y otra horizontal y que no está definida en un cierto intervalo.

e) Representa la curva de ecuación $y = e^{-1/x}$, prestando atención a los límites de $f(x)$ cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to \pm\infty$.

f) Representa las curvas siguientes (solución en las figuras 1 a 4 de estos apuntes):

$$y = \frac{x^4}{x-1}; \quad y = \frac{x^2(x+1)^2}{x-1}; \quad y = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}}; \quad y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)^2}{x-1}}$$

2. Curvas en cartesianas paramétricas

En este tipo de curvas, las coordenadas (x, y) de los puntos de la curva se expresan en función de un parámetro t:

$$x = f(t); \quad y = g(t)$$

Dando valores a t obtenemos los distintos puntos. Estas curvas no siempre representan funciones, pues un mismo valor de t puede dar lugar a un valor de x y varios de y.

Para representar estas curvas analizaremos los aspectos mencionados en el apartado **??**, para lo que debemos determinar ciertos valores del parámetro.

2.1. Cortes con los ejes

a) Corte con el eje OX. Buscamos los valores de t que anulan $g(t)$:

$$t = t_1 \,/\, g(t_1) = 0 \Longrightarrow \text{punto } P_1\,(f(t_1), 0)$$

b) Corte con el eje OY. Buscamos los valores de t que anulan $f(t)$:

$$t = t_2 \,/\, f(t_2) = 0 \Longrightarrow \text{punto } P_2\,(0, g(t_2))$$

2.2. Asíntotas

a) Asíntota vertical en $x = a$. Buscamos los valores de t que cumplen

$$t = t_3 \,\big/\, f(t_3) = a, \quad \lim_{t \to t_3} g(t) = \pm\infty$$

b) Asíntota horizontal de ordenada $y = b$. Buscamos los valores de t que cumplen

$$t = t_4 \,\big/\, \lim_{t \to t_4} f(t) = \pm\infty, \quad g(t_4) = b$$

c) Asíntota inclinada de ecuación $y = mx + n$. Buscamos los valores de t que cumplen

$$t = t_5 \,\big/\, \lim_{t \to t_5} f(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \to t_5} g(t) = \pm\infty$$

verificándose además

$$\lim_{t \to t_5} \frac{f(t)}{g(t)} = m \in \mathbb{R}; \quad \lim_{t \to t_5} g(t) - mf(t) = n \in \mathbb{R}$$

2.3. Tangentes

A partir de las ecuaciones $x = f(t),\ y = g(t)$ obtenemos $dx = f'(t),\ dy = g'(t)dt$, lo que nos permite obtener la condición de puntos de tangente horizontal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = 0$$

o bien de tangente vertical

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f'(t)}{g'(t)} = 0$$

2.4. Puntos dobles

Puntos dobles son aquellos por los que la curva pasa dos veces. Se obtiene un punto doble cuando, para dos valores distintos de t, coinciden tanto los valores correspondientes de x como los de y.

$$\exists\, t_6, t_7 \,\big/\, f(t_6) = f(t_7), \quad g(t_6) = g(t_7)$$

2.5. Representación de las curvas $x = f(t)$ y $y = g(t)$

Para facilitar la localización de los valores de t mencionados en los apartados anteriores, puede ser útil dibujar las curvas de ecuación $x = f(t)$ (en ejes $t - x$) e $y = g(t)$ (en ejes $t - y$).

2.6. Ejemplos

a) En las figuras 5 y 6 se representan las siguientes curvas.

$$x = \frac{t(t-1)(t-2)}{t+1},\ y = \frac{1}{t-1}; \qquad x = \frac{(t^2)(t-1)}{t+1},\ y = \frac{t^2}{t+1}$$

Para cada una de ellas se muestra la curva $t - x$, la curva $t - y$ y la curva $x - y$.

b) En la figura 7 se representa la cicloide, de ecuación $x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t$. En este caso, t toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, dando lugar por tanto a un sólo arco.

c) En la figura 8 se representa la astroide, de ecuación $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\operatorname{sen}^3 t$. Se pide obtener su ecuación en coordenadas $x - y$, eliminando el parámetro t.

d) En la figura 9 se representa la circunferencia de ecuaciones paramétricas $x = 3\cos^2 t$, $y = 3\operatorname{sen} t \cos t$. Se pide obtener su ecuación en coordenadas $x - y$, lo que permite determinar el radio y la posición del centro sin necesidad de dibujarla.

3. Curvas en polares

3.1. Definición

Dado un punto $P(x, y)$ del plano, llamamos radiovector al segmento orientado que une el origen con P. Su longitud se denota por ρ. Llamamos θ al ángulo que forma el radiovector con la dirección positiva del eje OX, tomando como sentido positivo de giro el antihorario.

Llamamos coordenadas polares de un punto al par (ρ, θ). El origen de coordenadas se denomina polo. El eje OX es el eje polar.

3.2. Relación entre polares y cartesianas

Proyectando el radiovector sobre los ejes OX y OY, vemos que las coordenadas x e y de P son los valores $\rho\cos\theta$ y $\rho\operatorname{sen}\theta$ respectivamente. Para obtener la relación inversa entre ambos sistemas de coordenadas, hacemos

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2, \;\; \tan\theta = \frac{y}{x} \; (x \neq 0)$$

de donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\;, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \; (x \neq 0)$$

El ángulo θ puede tomar cualquier valor real. Los del intervalo $(-\pi, \pi]$ se llaman valores principales. Una curva en polares se define por medio de una relación $\rho = \rho(\theta)$.

3.3. Ejemplos

a) La ecuación de la circunferencia de centro $C(R, 0)$ y radio R, es $\rho = 2R\cos\theta$. En la figura 9 (ejemplos de curvas en paramétricas) se representa el caso $R = 1.5$.

b) Las ecuaciones de la forma $\rho = a\cos n\theta$, $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, se llaman "rosas de n pétalos". El valor de a determina el tamaño de los pétalos (figs. 10 y 11).

c) La cardioide tiene como ecuación $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$ (en la figura 12, $a = 3$).

d) La ecuación de la espiral de Arquímedes es $\rho = a\theta$, por lo que el radiovector se anula para $\theta = 0$ y la curva pasa por el polo. Observamos que, en cada vuelta (θ crece 2π), ρ se incrementa en la cantidad $a\,2\pi$. En el ejemplo mostrado en la fig. 13, $a = 3$.

e) En la figura 14 se representa la Lemniscata de Bernouilli $\rho^2 = \cos 2\theta$.

f) En el caso del círculo asintótico (fig. 15) se observa que para valores de θ próximos a 0, se produce una asíntota horizontal ($\rho \to \infty$). Y cuando $\theta \to \infty$, la longitud del radiovector tiende a 1, acercándose los puntos de la curva a la circunferencia de radio 1, lo que explica su nombre.