5. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (06.02.2018)

Si f es integrable en $[a,b]$ y g es primitiva de f, se cumple $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Demostración:

Sea $P(x_0, \ldots, x_n)$ una partición de $[a,b]$. Consideramos un subintervalo cualquiera $[x_{i-1}, x_i]$.

Al ser primitiva de f, g es derivable en $[a,b]$. Entonces, por el teorema de Lagrange

$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \,/\, g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \tag{1}$$

Como $g'(\xi_i) = f(\xi_i)$ y $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, de la igualdad (1) obtenemos

$$f(\xi_i)\Delta x_i = g(x_i) - g(x_{i-1}) \tag{2}$$

Sean $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Para todo $i = 1, \ldots, n$ se cumple

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

luego, teniendo en cuenta (2),

$$m_i \Delta x_i \leq g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq M_i \Delta x_i, \; i = 1 \ldots n \tag{3}$$

Repetimos ahora la expresión (3) para cada uno de los valores de i y sumamos. Obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

donde el primero y tercer términos son las sumas inferior y superior de Darboux para la partición P, mientras que el segundo término resulta

$$g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \ldots g(x_n) - g(x_{n-1}) = g(b) - g(a)$$

Entonces tenemos que, para toda partición P,

$$s(P) \leq g(b) - g(a) \leq S(P)$$

es decir que el valor $g(b) - g(a)$ está acotado por las sumas inferior y superior de Darboux.

Al ser f integrable, tomando particiones P_m cada vez más finas, las sumas de Darboux tienden al límite común

$$\lim_{m\to\infty} S(P_m) = \lim_{m\to\infty} s(P_m) = \int_a^b f(x)dx$$

por lo que

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$