2.5. Condiciones suficientes de integrabilidad (01.03.2023)

a) Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

D: Supongamos que f es monótona creciente y $f(b) > f(a)$ (si $f(b) = f(a)$ la función es constante y su integrabilidad inmediata). Entonces, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i = \inf f(x) = f(x_{i-1})$$
$$M_i = \sup f(x) = f(x_i)$$

Elegido $\varepsilon > 0$, tomamos una partición tal que $\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, con la cual

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$
$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left[f(x_n) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + \cdots + f(x_1) - f(x_0) \right] = \varepsilon$$

luego $S(P) - s(P) < \varepsilon$ y se cumple la condición de integrabilidad.

b) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

D: Si f es continua en $[a, b]$, será uniformemente continua en $[a, b]$, por lo que dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existirá un δ tal que, para $x, x' \in [a, b]$ se cumple

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \tag{1}$$

Sea $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una partición de $[a, b]$ tal que $\Delta x_i < \delta$. Como f es continua, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ alcanzará valores máximo y mínimo, es decir $m_i = f(x_i')$ y $M_i = f(x_i'')$ para ciertos x_i', x_i'' de $[x_{i-1}, x_i]$.

Entonces, al ser $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i < \delta$, se cumplirá $x_i' - x_i'' < \delta$; luego, debido a (**??**),

$$M_i - m_i = |M_i - m_i| = |f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Por tanto, para la partición P, se cumple

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$$

con lo que se cumple la condición de integrabilidad.

c) Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

Decimos que una función es continua a trozos si tiene un número finito de puntos de discontinuidad, existen en ellos límites laterales y son finitos.

D: Puede verse en J. Burgos, 296.