Tema 6

Integración Definida

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1 Calcular la integral definida

$$\int_1^2 \ln|x| dx$$

Solución: Resolvemos la integral por partes. Si hacemos $u = \ln|x|$ y $dv = dx$, entonces

$$\begin{aligned} u = \ln|x| \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln|x| dx &= [x \ \ln|x|]_1^2 - \int_1^2 dx \\ &= 2\ln 2 - (2-1) = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 Calcular la integral

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Solución: Esta integral se resuelve por cambio de variable. Si hacemos $u = 1 - x^2$ obtenemos que $du = -2x\, dx$. Además como para $x = 0$ tenemos que $u = 1$ y para $x = 1$ que $u = 0$, resulta que

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_1^0 u^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3 Calcular la integral

$$\int_3^5 \frac{5x+4}{x^2+3x-10}\,dx$$

Solución: Es la integral de una función racional, así que en primer lugar debemos descomponer la función racional en suma de fracciones simples.

Si calculamos la raíces de $x^2+3x-10=0$ obtenemos que son $x=2$ y $x=-5$. De ese modo tenemos que

$$\frac{5x+4}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

por lo que

$$5x+4 = A(x+5) + B(x-2) = (A+B)x + (5A-2B)$$

y, por tanto A y B son la solución del sistema

$$A+B=5, \qquad 5A-2B=4$$

es decir,

$$A=2, \qquad B=3$$

De este modo tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+4}{x^2+3x-10}\,dx &= \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x+5}\,dx\\ &= 2\ln|x-2| + 3\ln|x+5| + C\end{aligned}$$

y aplicando la Regla de Barrow, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{5x+4}{x^2+3x-10}\,dx &= [2\ln|x-2| + 3\ln|x+5|]_3^5\\ &= 2\ln 3 + 3\ln 10 - 2\ln 1 - 3\ln 8 = 2\ln 3 + 3\ln|5/4|\end{aligned}$$

Ejercicio 4 Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$, el eje de coordenadas y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

Solución: Sabemos que el área que nos piden viene dada por

$$A = \int_0^\pi |\operatorname{sen} x \cos x| dx$$

Entre $x = 0$ y $x = \pi$ la función $\operatorname{sen} x$ se anula en $x = 0$ y $x = \pi$, y $\cos x$ se anula en $x = \pi/2$. Por tanto $\operatorname{sen} x \cos x$ se anula en $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Entre $x = 0$ y $x = \pi/2$ es $f(x) \geq 0$ (pues $\operatorname{sen} x \geq 0$ y $\cos x \geq 0$) y entre $x = \pi/2$ y $x = \pi$ tenemos que $f(x) \leq 0$ (pues $\operatorname{sen} x \geq 0$ y $\cos x \leq 0$). En consecuencia obtenemos que

$$A = \int_0^\pi |\operatorname{sen} x \cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x \; dx - \int_{\pi/2}^\pi \operatorname{sen} x \cos x \; dx$$

Aplicando el método de cambio de variable: si hacemos $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x \; dx$, por lo que $\operatorname{sen} x \cos x \; dx = u \; du$. Además para $x = 0$ se tiene $u = 0$, para $x = \pi/2$ es $u = 1$ y para $x = \pi$ es $u = 0$, por lo que

$$A = \int_0^1 u \; du - \int_1^0 u \; du = 2 \int_0^1 u \; du = 2 \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = 1$$

Ejercicio 5 Calcular el área comprendida entre $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = -2x$.

Solución: En primer lugar calculemos los puntos de corte entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

$$x^3 - 3x = -2x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

por lo que los puntos de corte son $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. Claramente $f(x) \geq g(x)$ entre $x = -1$ y $x = 0$, y además $f(x) \leq g(x)$ entre $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 Calcular el área bajo la curva $y = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = b$ $(b > 0)$. ¿Qué ocurre cuando $b \to +\infty$?

Solución: Puesto que $e^{-x} \geq 0$ para todo x, tenemos que el área entre $x = 0$ y $x = b$ es

$$A(b) = \int_0^b e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^b = 1 - e^{-b}$$

Cuando $b \to +\infty$ tenemos

$$\lim_{b\to+\infty} A(b) = 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1$$

Ejercicio 7 Calcular el área encerrada por la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución: Es claro que, dada la simetría de la figura, en el cuadrante positivo ($x \geq 0$, $y \geq 0$) se encuentra la cuarta parte del área total. Si en esta parte despejamos la y de la ecuación de la elipse, obtenemos que

$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Esta curva corta al eje de abscisas en $x = a$, por lo que el área buscada es

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

Si ahora hacemos el cambio $x = a \operatorname{sen} t$, tenemos que $dx = a\cos t\ dt$, y además cuando $x = 0$ se tiene $t = 0$, y cuando $x = a$ es $t = \pi/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\ a\cos t\ dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\ dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} A &= 2ab\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\ dt = 2ab\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} \\ &= 2ab\left[(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi) - 0\right] = \pi ab \end{aligned}$$

Por tanto hemos obtenido que el área de la elipse es $A = \pi ab$.

Ejercicio 8 Calcular la longitud de la curva $y = \ln|\cos x|$ entre $x = 0$ y $x = \pi/6$.

Solución: Recordemos que la longitud de una curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

En nuestro ejemplo tenemos $y' = -\tan x$, por lo que la longitud buscada será

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \tan^2 x}\; dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}\; dx$$

Haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, obtenemos $dt = \cos x\; dx$, cuando $x = 0$ es $t = 0$ y si $x = \pi/6$ entonces $t = 1/2$. Por tanto la longitud es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}\; dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\; dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1 - t^2}\; dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{3/2}{1/2}\right| - \ln|1|\right] = \frac{\ln 3}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 9 Calcular el volumen de revolución generado por la curva $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución: Recordemos que el volumen de revolución generado por la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ viene dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\; dx$$

En nuestro ejemplo tenemos por tanto

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2\; dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\; dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^2 = \pi \left[\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right] = \frac{206}{15}\pi \end{aligned}$$

Ejercicio 10 Calcular el valor medio de la función $f(x) = x^2 - x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Toma f ese valor en algún punto del intervalo $[0, 1]$?

Solución: El valor medio de f en el intervalo $[0,1]$ viene dado por

$$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 (x^2 - x + 1)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

Sabemos, después del teorema 6.3.1, que una función continua en un intervalo alcanza su valor medio en algún punto de dicho intervalo. Como f es continua en $[0,1]$, obtenemos que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = 5/6$.

Ejercicios propuestos

Las soluciones se encuentran al final.

Ejercicio 1 Calcular la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x \; dx$$

Ejercicio 2 Calcular la integral definida

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \; dx$$

Ejercicio 3 Calcular la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \; dx$$

Ejercicio 4 Calcular la integral definida

$$\int_0^{1} x e^{x^2} \; dx$$

Ejercicio 5 Calcular la integral definida

$$\int_4^{6} \frac{3x-1}{x^2-2x-3} \; dx$$

Ejercicio 6 Calcular la integral definida

$$\int_4^{7} \frac{2}{x^2-5x+6} \; dx$$

Ejercicio 7 Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = x^4 - 4x^2$.

Ejercicio 8 Calcular el área bajo $y = \ln x$, sobre $y = 0$ y entre $x = 1$ y $x = e$.

Ejercicio 9 Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^3 - x + 6$ e $y = 3x + 6$.

Ejercicio 10 Calcular la longitud de la curva $y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ entre $x = 0$ y $x = \ln 2$.

Soluciones de los ejercicios propuestos:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x \; dx = \pi - 2$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \; dx = -\frac{2}{5}\left(e^{2\pi} + 1\right)$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cos x \; dx = \frac{1}{4}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} x e^{x^2} \; dx = \frac{e-1}{2}$
5. $\displaystyle\int_4^{6} \frac{3x-1}{x^2-2x-3} \; dx = \ln\left(\frac{63}{5}\right)$
6. $\displaystyle\int_4^{7} \frac{2}{x^2-5x+6} \; dx = \ln\left(\frac{64}{25}\right)$
7. $A = \dfrac{96}{5}$
8. $A = 1$
9. $A = 8$
10. $L = \dfrac{3}{4}$