Tema 6

Integración Definida

6.1 Sumas de Riemann e integral definida

Supongamos que estamos interesados en calcular el área que se encuentra bajo una curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ (para simplificar, consideremos el caso en el que f es positiva). Una forma sencilla de aproximar dicha área es dividir el intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos y sumar las áreas de los rectángulos que tienen por base los subintervalos y por altura el valor de la función f en un punto de dicho subintervalo (véase la figura 6.1). Cuanto más pequeña sea la base de los rectángulos mejor será la aproximación.

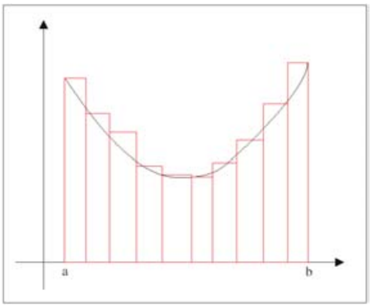

Figura 6.1: Aproximación de un área por rectángulos

Para precisar un poco la idea que acabamos de exponer, vamos a introducir algunos conceptos.

Definición 6.1.1 Dado un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, se llama **partición** de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de puntos de $[a, b]$

tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Se denotará por $\mathcal{P}[a, b]$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Se dice entonces que $[x_{k-1}, x_k]$ es, para $k = 1, 2, \ldots, n$, el **subintervalo k-ésimo** de la partición y llamamos **amplitud** del subintervalo a $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se llama **diámetro** de la partición a la mayor de las aplitudes, es decir, $|P| = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$.

Definición 6.1.2 Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$. Se dice que P_2 es **más fina** que P_1 si $P_1 \subset P_2$ (es decir, P_2 tiene los puntos de P_1 y, posiblemente, más).

Podemos dar ahora una definición precisa del área sumada por los rectángulos.

Definición 6.1.3 Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Se llama **suma de Riemann** de la función f relativa a la partición P, a

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

siendo t_k un punto arbitrario de $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Observación 6.1.1 Para una misma función f y una misma partición P, podemos obtener distintas sumas de Riemann, según la elección de los puntos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ que se haga.

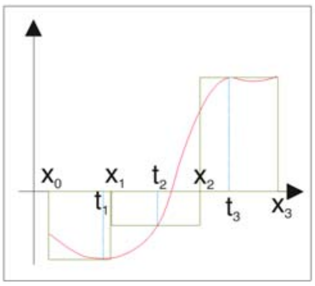

Figura 6.2: Interpretación geométrica de la suma de Riemann

El problema inicial de calcular el área bajo una curva positiva $y = f(x)$ podemos resolverlo ahora calculando las sumas de Riemann para particiones cada vez más finas. Si cuando el diámetro de la partición tiende a cero la suma de Riemann tiende a un número real habremos obtenido el área bajo la curva (si ésta es positiva) y diremos que la función es integrable.

Definición 6.1.4 Una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada se dice **integrable en el sentido de Riemann** o **Riemann-integrable** en el intervalo $[a, b]$, si existe un número real A verificando que para todo $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que para cualquier $P \in \mathcal{P}[a, b]$ más fina que P_ε se tiene que $|S(P) - A| < \varepsilon$.

En ese caso se dice que A es la **integral de Riemann de f en** $[a, b]$ y se representa por

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Al conjunto de todas las funciones que son Riemann integrables en $[a, b]$ se le denota por $\mathcal{R}[a, b]$.

Observación 6.1.2 En la definición anterior, decir que A es la integral de Riemann de f en $[a, b]$ es equivalente a decir que

$$A = \lim_{|P| \to 0} S(P)$$

donde $P \in \mathcal{P}[a, b]$, si este límite existe.

Como no es fácil determinar a priori si una función es Riemann integrable o no teniendo sólo en cuenta la definición vamos a enunciar el siguiente resultado en el que representamos el conjunto de las funciones continuas en $[a, b]$ por $\mathcal{C}[a, b]$.

Teorema 6.1.1

$$f \in \mathcal{C}[a, b] \Longrightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$$

Es decir, todas las funciones continuas en $[a, b]$ son Riemann integrables en $[a, b]$.

6.2 Propiedades de la integral definida

A continuación mencionaremos algunas propiedades de la integral definida que nos serán útiles en el cálculo de las mismas.

Linealidad:
Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

Aditividad:
Sean $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $c \in (a, b)$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a, c]$, $f \in \mathcal{R}[c, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Monotonía:
Sean $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$$

En particular, si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

Valor absoluto de la integral:
Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Entonces $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ y se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Otras propiedades relacionadas con los límites de integración:
Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ $(a < b)$. Entonces

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

6.3 Teorema de la media

Cuando tenemos n valores reales $x_1, \ldots, x_n$, resulta muy sencillo calcular su valor medio $(x_1 + \cdots + x_n)/n$, que viene siendo el resultado de repartir por igual la suma de los n valores entre todos. ¿Qué podríamos entender por el valor medio de una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el intervalo $[a, b]$? Pues, siguiendo la línea argumental anterior (por simplicidad pensemos en el caso de una función positiva $f \geq 0$), el área bajo la curva sustituiría a la suma de los n valores y la longitud del intervalo al número de valores, de modo que el valor medio sería $(\int_a^b f(x)dx)/(b-a)$, valor constante que tendría bajo si el mismo área que la función f (véase figura 6.3).

Definición 6.3.1 Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Se llama **valor medio** de f en $[a,b]$ al valor

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

En relación al concepto de valor medio se tiene el siguiente resultado, conocido como **teorema de la media** o también como **teorema del valor medio del cálculo integral**.

Teorema 6.3.1 (de la media)
Sea $f : [a,b] \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ *y sean* $m = \inf\{f(x)/x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x)/x \in [a,b]\}$.

1. *Si* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *entonces existe* $\eta \in [m,M]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \eta(b-a)$$

2. *Si* $f \in \mathcal{C}[a,b]$, *entonces existe* $\xi \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a)$$

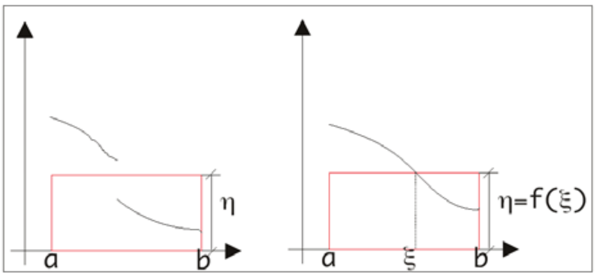

Figura 6.3: Teorema de la media

Observación 6.3.1 El teorema anterior significa que el área bajo la curva (en el caso $f \geq 0$) es igual a la que hay bajo el valor medio (es decir, bajo la recta $y = \eta$) y además, si la función es continua, el valor medio es la imagen por f de un cierto valor $\xi \in [a,b]$ (véase figura 6.3).

6.4 Teorema fundamental del Cálculo Integral. Regla de Barrow

El siguiente teorema demuestra que existe una estrecha relación entre la integración y el cálulo de primitivas (y de ahí que se hable de integral indefinida a la hora del calcular las primitivas de una función y se utilice el mismo símbolo para la integral definida y la integral indefinida, pese a que se definen de forma muy diferente).

Teorema 6.4.1 (Fundamental del Cálculo Integral)
Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Si definimos $F : [a,b] \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ de modo que

$$x \in [a,b] \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(s)\ ds$$

entonces se verifica que

1. $F \in \mathcal{C}[a,b]$
2. *Si f es continua en $x_0 \in [a,b]$ entonces F es derivable en x_0 y se tiene $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Observación 6.4.1 El teorema anterior nos dice que si f es continua en $[a,b]$, entonces F es una primitiva de f.

Otro teorema muy importante en el cálculo integral es el siguiente, que nos permite calcular una integral definida si conocemos una primitiva del integrando.

Teorema 6.4.2 (Regla de Barrow)
Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y supongamos que F es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 6.4.1 Calculemos $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Como $\arctan x$ es una primitiva de $1/(1+x^2)$, aplicando la regla de Barrow obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

6.5 Integración por partes y cambio de variable en integrales definidas

Los métodos de integración por partes y de cambio de variable que habíamos visto en el tema 5 (para el cálculo de primitivas), son aplicables al cálculo de integrales definidas sin más que aplicar la regla de Barrow. Así tenemos los dos resultados siguientes:

Teorema 6.5.1 *Sean* $u, v : [a, b] \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ *dos funciones continuas con derivada continua en* $[a, b]$*. Se verifica que*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx$$

Observación 6.5.1 Si usamos la notación $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$ y $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, el resultado anterior puede escribirse de la siguiente forma más abreviada

$$\int_a^b u\ dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\ du$$

Ejemplo 6.5.1 Calculemos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x\ dx$.

Si para integrar por partes, tomamos $u = x$ y $dv = \cos x\ dx$, resulta que $du = dx$ y $v = \operatorname{sen} x$, por lo que

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x\ dx = [x \operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Teorema 6.5.2 *Sea* $f : [a, b] \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ *una función continua y sea* $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ *continua y con derivada continua tal que* $[a, b] = \phi([c, d])$*,* $a = \phi(c)$*,* $b = \phi(d)$*. Entonces se verifica que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\ dt$$

Observación 6.5.2 Podemos utilizar la siguiente regla para recordar el teorema anterior: si el cambio de variable es $x = \phi(t)$ entonces $dx = \phi'(t)dt$ y, por tanto, $f(x) = f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Además, como tenemos que $a = \phi(c)$ y $b = \phi(d)$, resulta que $x = a$ cuando $t = c$ y $x = b$ cuando $t = d$, y los límites de integración deben de transformarse del mismo modo.

Ejemplo 6.5.2 Calculemos $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$.

Si hacemos el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, obtenemos que $\cos x\ dx = dt$ y como $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$, resulta que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

6.6 Aplicaciones de la integral definida

La aplicación más inmediata de la integral definida es, como ya hemos comentado en alguna sección anterior, el cálculo del **área bajo una curva**. Así, el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ (con $f \geq 0$), el eje Ox ($y = 0$), y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, viene dada por la expresión

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

Si la curva $y = f(x)$ no está siempre sobre el eje Ox, habrá que tener en cuenta que en aquellos tramos en los que $f \leq 0$, el área viene dada por la integral cambiada de signo, es decir, si $f(x) \leq 0$ para $x \in [c, d]$, entonces el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, $y = 0$, $x = c$ y $x = d$ viene dada por

$$A = -\int_c^d f(x)\ dx$$

De las consideraciones anteriores se deduce que, en general, si queremos calcular el área entre una curva $y = f(x)$ (que puede cambiar de signo en el intervalo $[a, b]$), $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, ésta viene dada por la expresión

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

para cuyo cálculo será necesario conocer previamente los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje $y = 0$, es decir, los puntos donde $y = f(x)$ cambia de signo.

Ejemplo 6.6.1 Calculemos el área comprendida ente la curva $y = x \operatorname{sen} x$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Puesto que tanto x como $\operatorname{sen} x$ son positivos entre 0 y π, tenemos que el área buscada viene dada por

$$A = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\ dx$$

Integrando por partes y tomando $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x$, obtenemos que $du = dx$ y $v = -\cos x$, por lo que

$$A = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \; dx = -\pi \cos \pi + 0 + \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = \pi$$

Ejemplo 6.6.2 Calculemos el área comprendida entre la curva $y = \operatorname{sen} x$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Puesto que $\operatorname{sen} x \geq 0$ entre $x = 0$ y $x = \pi$, y $\operatorname{sen} x \leq 0$ entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$ (es decir, $y = \operatorname{sen} x$ cambia de signo en $x = \pi$), obtenemos que el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x| dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \; dx \\ &= -\cos \pi + \cos 0 - (-\cos(2\pi) + \cos \pi) = 4 \end{aligned}$$

Obsérvese que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \; dx = 0$ no nos da el área entre la curva y el eje Ox.

Si queremos calcular el **área comprendida entre dos curvas**, habrémos de tener en cuenta los puntos de intersección de ambas. Por situarnos en un caso sencillo, supongamos que tenemos dos funciones $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ y f y g no tienen más puntos de intersección que $x = a$, $x = b$ (véase figura 6.4). En este caso, el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

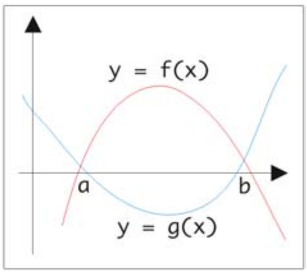

Figura 6.4: Área comprendida entre dos curvas

En general, si las curvas tienen más de dos puntos de intersección, habrá que considerar los subintervalos en los que una de las curvas está sobre la otra y viceversa, teniendo en cuenta los cambios de signo. Esto se puede resumir diciendo que dadas dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, si su punto de intersección "más a la izquierda" es $x = a$, y su punto de intersección "más a la derecha" es $x = b$, entonces el área comprendida entre ambas curvas viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Ejemplo 6.6.3 Calculemos el área comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x}+2$ e $y = x^2 + 2$.

En primer lugar calculamos los puntos de corte de ambas curvas. Para ello resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} + 2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \\ &\Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \end{aligned}$$

que tiene por soluciones $x = 0$ y $x = 1$. Así, los puntos de corte son el $(0, 2)$ y el $(1, 3)$. Puesto que para $x \in [0, 1]$ claramente tenemos que $\sqrt{x} + 2 \geq x^2 + 2$ (compruébese, por ejemplo, para $x = 1/2$), el área entre ambas curvas vendrá dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left[\sqrt{x} + 2 - (x^2 + 2)\right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \\ &= \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

es decir, el área buscada es $A = 1/3$.

Ejemplo 6.6.4 Calculemos el área comprendida entre las curvas $y = f(x) = x^2 - x + 1$ e $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Para calcular los puntos de corte de ambas curvas resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x - 3) = 0 \end{aligned}$$

que tiene por soluciones $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$, por lo que los puntos de corte son $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(3, 7)$. Se comprueba fácilmente que $g(x) \geq f(x)$ para

$x \in [0,1]$ y $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [1,3]$, por lo que el área buscada es

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^3 |x^3 - 3x^2 + 2x + 1 - (x^2 - x + 1)|dx = \int_0^3 |x^3 - 4x^2 + 3x|dx \\
&= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 0 - \left[\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right] = \frac{37}{12}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido, por tanto, que el área entre ambas curvas es $A = 37/12$ (las unidades vendrán especificadas por las de los datos del problema).

Además de las fórmulas anteriores para el cálculo de áreas, se puede utilizar la integral definida para el cálculo de muchas otras magnitudes. Como ejemplo (y sin ánimo de ser exhaustivos) señalaremos aquí las siguientes:

La **longitud de una curva** $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

El **volumen de un sólido de revolución** obtenido al hacer girar la curva $y = f(x)$ ($f \geq 0$) entre $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje Ox viene dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\ dx$$

La **superficie lateral del sólido de revolución** indicado en el parrafo anterior viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

También se puede utilizar la integral definida para el cálculo de magnitudes físicas como el momento de inercia, el centro de masas, etc. El alumno puede completar información sobre este punto en particular y sobre el tema, en general, en cualquiera de los libros recomendados en la bibliografía.