CÁLCULO INFINITESIMAL 2

APUNTES DE LA ASIGNATURA

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE EXAMEN

Jaime Fe Marqués

ETSI Caminos – A Coruña

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

This work by Jaime Fe Marqués is licensed under Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Índice general

Presentación 9

1. Integración **11**
1.1. Primitiva de una función 11
1.1.1. Definición 11
1.1.2. Funciones discontinuas con primitiva 11
1.1.3. Condición necesaria para la existencia de primitiva 12
1.2. La integral de Riemann 13
1.2.1. Partición de un intervalo 13
1.2.2. Sumas de Darboux 13
1.2.3. Función integrable según Riemann 14
1.2.4. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad 15
1.2.5. Condiciones suficientes de integrabilidad 15
1.2.6. Propiedades de la integral de Riemann 15
1.3. Teorema de la media 16
1.4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo. 17
1.4.1. Función integral 17
1.4.2. Teorema 17
1.4.3. Corolario. Regla de Barrow 18
1.5. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo 19
1.6. Integrales impropias 19
1.7. Ejercicios de autoevaluación 19
1.7.1. Test verdadero/falso 19
1.7.2. Cuestión 20
1.7.3. Solución del test verdadero/falso 20
1.7.4. Solución de la cuestión 20

2. Funciones vectoriales **21**
2.1. Introducción. Tipos de funciones 21
2.2. Espacio euclídeo 21
2.2.1. Producto escalar ordinario 21
2.2.2. Norma euclídea 22
2.2.3. Distancia euclídea 22
2.3. Funciones vectoriales de variable real 22
2.3.1. Límite 23
2.3.2. Continuidad 23
2.3.3. Diferenciabilidad 24
2.4. Funciones reales de variable vectorial 24
2.4.1. Límite 24
2.4.2. Continuidad 26
2.4.3. Derivada direccional y derivada parcial 26
2.4.4. Diferencial 28

2.4.5. Interpretación geométrica del gradiente y la diferencial . . . 29
2.4.6. Teoremas de diferenciabilidad . . . 29
2.5. Funciones vectoriales de variable vectorial . . . 32
2.5.1. Límite . . . 33
2.5.2. Continuidad . . . 33
2.5.3. Diferenciabilidad . . . 33
2.6. Composición de funciones . . . 34
2.6.1. Función compuesta. Continuidad y diferenciabilidad . . . 34
2.6.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena . . . 35
2.7. Derivadas de orden superior . . . 37
2.7.1. Definición . . . 37
2.7.2. Derivadas cruzadas . . . 38
2.7.3. Diferenciales sucesivas . . . 39
2.8. Desarrollo de Taylor . . . 40
2.8.1. Expresión general . . . 40
2.8.2. Expresión matricial. . . . 42
2.9. Extremos relativos . . . 43
2.9.1. Condición necesaria de extremo . . . 43
2.9.2. Condición suficiente de extremo . . . 44
2.9.3. Determinación del tipo de forma cuadrática . . . 45
2.9.4. Cálculo de extremos. Resumen y ejemplos . . . 45
2.10. Función implícita . . . 47
2.10.1. Definición . . . 47
2.10.2. Teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables . . . 48
2.10.3. Generalización del teorema a funciones vectoriales . . . 49
2.11. Extremos condicionados . . . 51
2.11.1. Condiciones en forma explícita . . . 51
2.11.2. Condiciones en forma implícita . . . 51
2.12. Ejercicios de autoevaluación . . . 54
2.12.1. Test verdadero/falso . . . 54
2.12.2. Cuestiones . . . 55
2.12.3. Solución de los test verdadero/falso . . . 56
2.12.4. Solución de las cuestiones . . . 58

3. Series numéricas **61**
3.1. Definición . . . 61
3.2. Serie geométrica . . . 62
3.3. Condición necesaria de convergencia . . . 63
3.4. Propiedades de las series numéricas . . . 63
3.5. Criterio de convergencia de Cauchy . . . 65
3.6. Series de términos positivos . . . 66
3.6.1. Mayorante y minorante . . . 66
3.6.2. Serie de Riemann . . . 67
3.6.3. Comparación de series . . . 68
3.6.4. Criterio de la raíz (Cauchy-Hadamard) . . . 69
3.6.5. Criterio del cociente (D'Alembert) . . . 70
3.6.6. Criterio de Raabe . . . 71
3.6.7. Criterio logarítmico . . . 72
3.6.8. Criterio de condensación . . . 73
3.7. Series de términos positivos y negativos . . . 74
3.7.1. Convergencia y divergencia absoluta e incondicional . . . 74

3.7.2. Teorema de Riemann . . . 76
3.7.3. Teorema de Dirichlet . . . 77
3.7.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz . . . 78
3.8. Métodos de suma de series . . . 80
3.8.1. Por descomposición . . . 80
3.8.2. A partir de la armónica . . . 82
3.8.3. A partir del desarrollo en serie de la exponencial de x . . . 83
3.8.4. Series hipergeométricas . . . 84
3.8.5. Carácter y suma de series. Resumen . . . 85
3.9. Ejercicios de autoevaluación . . . 86
3.9.1. Test verdadero/falso . . . 86
3.9.2. Cuestión . . . 87
3.9.3. Solución de los test verdadero/falso . . . 87
3.9.4. Solución de la cuestión . . . 89

4. Sucesiones y series funcionales **91**
4.1. Sucesiones funcionales . . . 91
4.1.1. Introdución. Distancia entre funciones . . . 91
4.1.2. Sucesión funcional . . . 91
4.1.3. Convergencia simple o puntual . . . 92
4.1.4. Convergencia uniforme . . . 92
4.1.5. Sucesión de funciones continuas . . . 93
4.2. Series funcionales . . . 94
4.2.1. Definición . . . 94
4.2.2. Convergencia simple y uniforme . . . 94
4.2.3. Criterio de la mayorante (Weierstrass) . . . 95
4.2.4. Serie de funciones continuas . . . 95
4.2.5. Integración de una serie de funciones . . . 95
4.2.6. Derivación de una serie de funciones . . . 95
4.3. Series de potencias . . . 96
4.3.1. Definición . . . 96
4.3.2. Teorema de Cauchy-Hadamard . . . 96
4.3.3. Continuidad, derivación e integración . . . 98
4.3.4. Teoremas de Abel . . . 99
4.3.5. Desarrollo de una función en serie de potencias. Serie de Taylor . . . 101
4.4. Ejercicios de autoevaluación . . . 103
4.4.1. Test verdadero/falso . . . 103
4.4.2. Cuestión . . . 103
4.4.3. Solución del test verdadero/falso . . . 104
4.4.4. Solución de la cuestión . . . 104

5. Los números complejos **105**
5.1. Introducción . . . 105
5.2. Definición. Forma binómica. Operaciones básicas . . . 105
5.3. Forma trigonométrica. Representación gráfica . . . 106
5.4. Complejo conjugado, opuesto e inverso. Cociente . . . 107
5.5. Exponencial de un complejo. Fórmula de Euler . . . 108
5.6. Potencia natural. Fórmula de Moivre . . . 109
5.7. Raiz n-ésima de un complejo . . . 109
5.8. Teorema fundamental del Álgebra . . . 110
5.9. Ejercicios de autoevaluación . . . 110
5.9.1. Test verdadero/falso . . . 110

5.9.2. Cuestión . . . 111
5.9.3. Solución del test verdadero/falso . . . 111
5.9.4. Solución de la cuestión . . . 112

6. Documentos de apoyo **113**
6.1. Integrabilidad: condiciones suficientes (apdo. 1.2.5) . . . 113
6.1.1. Toda función monótona en $I=[a,b]$ es integrable en I . . . 113
6.1.2. Toda función continua en $I=[a,b]$ es integrable en I . . . 113
6.1.3. Toda función continua a trozos en $I=[a,b]$ es integrable en I . . . 114
6.2. Segundo teorema fundamental (apdo. 1.5) . . . 114
6.3. Demostración de tres desigualdades (apdo. 2.2) . . . 115
6.3.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz . . . 115
6.3.2. Desigualdad triangular de la norma . . . 115
6.3.3. Desigualdad triangular de la distancia . . . 116
6.4. Ejercicios de límites (apdo. 2.4.1) . . . 116
6.5. Jacobiano de la función inversa (apdo. 2.6.2) . . . 117
6.6. Problema de extremos con 2 variables (apdo. 2.9.1) . . . 118
6.7. Forma cuadrática semidefinida (apdo. 2.9.2) . . . 119
6.8. Función implícita. Ejemplos (apdo. 2.10.3) . . . 120
6.9. Extremos con 2 condiciones. Ejemplo (apdo. 2.11.2) . . . 121
6.10. Ejercicios resueltos de suma de series (apdo. 3.8.5) . . . 122
6.10.1. Descomposición en combinación lineal de series convergentes . . . 122
6.10.2. Descomposición en combinación lineal de series divergentes . . . 122
6.11. Sucesión de funciones continuas (apdo. 4.1.5) . . . 123
6.12. Continuidad, derivación e integración de una serie de potencias (apdo. 4.3.3) . . . 123

7. Cuestiones y problemas de examen **125**
7.1. Cuestiones de examen . . . 125
Curso 10/11 . . . 125
Curso 11/12 . . . 125
Curso 12/13 . . . 126
Curso 13/14 . . . 126
Curso 14/15 . . . 127
Curso 15/16 . . . 127
Curso 16/17 . . . 127
Curso 17/18 . . . 128
Curso 18/19 . . . 128
Curso 19/20 . . . 129
Curso 20/21 . . . 130
Curso 21/22 . . . 130
Curso 22/23 . . . 131
Curso 23/24 . . . 131
Curso 24/25 . . . 132
7.2. Soluciones a las cuestiones . . . 133
7.3. Problemas de examen . . . 153
Curso 10/11 . . . 153
Curso 11/12 . . . 154
Curso 12/13 . . . 155
Curso 13/14 . . . 156
Curso 14/15 . . . 157
Curso 15/16 . . . 158
Curso 16/17 . . . 159

Curso 17/18 160
Curso 18/19 160
Curso 19/20 161
Curso 20/21 163
Curso 21/22 164
Curso 22/23 165
Curso 23/24 166
Curso 24/25 167
7.4. Soluciones a los problemas 169
7.5. Cuestiones tipo test (V-F) 177
7.6. Soluciones a las cuestiones tipo test 183

Presentación

El presente texto está dirigido a los estudiantes de la asignatura Cálculo Infinitesimal 2 del Grado en Tecnología de la Ingeniería Civil, impartido en la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad de A Coruña. Contiene las ideas fundamentales que se exponen en las clases de teoría, acompañadas de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos, así como una recopilación de cuestiones y problemas de examen.

Los cinco primeros capítulos corresponden a los correspondientes temas del programa de la asignatura: 1. Integración, 2. Funciones vectoriales, 3. Series numéricas, 4. Sucesiones y series funcionales y 5. Los números complejos.

El capítulo 6 contiene diversos documentos de apoyo: se incluyen en él algunos ejercicios de cierta extensión que clarifican distintos aspectos de la teoría y complementan los ejemplos resueltos; también figuran algunas demostraciones de interés, que se ha visto preferible no incluir en el tema correspondiente.

Por último, en el capítulo 7 se reúnen 66 cuestiones y 106 problemas propuestos en examen desde el curso 2010/11 al 2024/25. Las cuestiones incluyen su resolución detallada y los problemas sólo el resultado final.

Al recoger la mayor parte del contenido de las clases, los apuntes permiten dedicar mayor atención a la explicación, facilitando así la comprensión de la materia. Los ejercicios de autoevaluación del final de cada capítulo, tipo test y cuestiones cortas, facilitan asimismo el estudio personal posterior y la comprobación de la asimilación de los conceptos expuestos. En el caso de utilizar para el estudio el documento en pdf, los enlaces desde el índice a los distintos apartados, y entre estos, facilitan su localización.

Este material pretende ser un apoyo para las clases, pero no sustituirlas. En el aula se desarrollan y comentan las ideas aquí contenidas, se relacionan conceptos, se resuelven ejercicios y se dibujan algunos gráficos que complementan los apuntes. Por ello se recomienda vivamente la asistencia a clase para facilitar el dominio de la materia.

La mayor parte de los ejercicios de examen del capítulo 7 son originales y en su preparación han participado los distintos profesores que han colaborado en la asignatura durante estos años: Xesús Nogueira, Andrés Soage, Marco Campo, Iván Couceiro y Guillermo Lorenzo. Asimismo, a lo largo del texto aparecen referencias al libro de Juan de Burgos Román "Cálculo infinitesimal de una variable" (2ª ed.), que ha sido de gran ayuda en este intento de preparar unos apuntes útiles, claros y con el suficiente rigor.

A Coruña, 24 de junio de 2026

Tema 1

Integración

1.1. Primitiva de una función

1.1.1. Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que $F : I \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en I si F es derivable en I y se cumple $F' = f$. En ese caso escribimos:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Si F es primitiva de f, serán primitivas las funciones $F + K$, $\forall K \in \mathbb{R}$ y sólo ellas. Es decir, **toda primitiva de f es de la forma $F + K$.**
En efecto, si F es primitiva de f,

$$(F + K)' = F' = f$$

luego $F + K$ es primitiva de f.
Por otro lado, si G es también primitiva de f, es decir $G' = f$, entonces:

$$(G - F)' = G' - F' = 0 \Longrightarrow G - F = K \Longrightarrow G = F + K$$

1.1.2. Funciones discontinuas con primitiva

Como veremos, toda función continua tiene primitiva. Pero existen funciones discontinuas que tienen también primitiva. Por ejemplo, la función

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene como derivada fuera del origen a $F'(x) = 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. En el origen aplicamos la definición de derivada, obteniendo:

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

luego F es derivable también en $x = 0$. Sin embargo, su función derivada f,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no tiene límite cuando $x \to 0$. Es decir, f es discontinua, pero tiene como primitiva a F, $\forall x$. Luego existen funciones discontinuas que tienen primitiva.

Ejercicio. Estudia si se puede aplicar lo anterior a la función:

$$F(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1.1.3. Condición necesaria para la existencia de primitiva

Que existan funciones discontinuas con primitiva (apdo. 1.1.2) no significa que cualquier función discontinua la tenga. Veremos a continuación que si una función f tiene una discontinuidad de salto en un punto, no tiene primitiva en dicho punto. O, lo que es lo mismo, *es condición necesaria para que f tenga primitiva en I, que no tenga discontinuidades de salto en I.*

Recordamos lo visto en "La derivada como límite de derivadas" (C. Inf. 1, apdo. **4.12**):

Sea $F : I \to \mathbb{R}$, definida en $I = [a, a + \delta)$. Si F es continua en I, derivable en $I \setminus \{a\}$ y $\exists \lim_{x \to a^+} F'(x)$, entonces F es derivable en a^+ y se cumple:

$$F'(a^+) = \lim_{x \to a^+} F'(x)$$

(y la afirmación correspondiente para a^-).

Así pues, si la función F' tiene algún límite lateral en a, existirá la correspondiente derivada lateral de F en a y tendrá el valor de dicho límite.

Demostración. Consideramos una función F derivable en I, que será por tanto primitiva de su función derivada F', a la que llamaremos f. Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que f tiene una discontinuidad de salto en $a \in I$, lo que significa que posee límites laterales distintos en a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Como en I se cumple $F' = f$, sustituímos, obteniendo:

$$\lim_{x \to a^+} F'(x) \neq \lim_{x \to a^-} F'(x)$$

Pero cada uno de estos límites, por la propiedad que acabamos de recordar, coincide con la correspondiente derivada lateral de F, es decir:

$$F'(a^+) \neq F'(a^-)$$

luego no existe $F'(a)$ y f no tiene primitiva en a, contra la hipótesis.

Ejemplo. Sea la función continua: $F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$.

$F(x)$ es primitiva de la función parte entera, $y = E(x)$, en los intervalos (0,1), (1,2) y (2,3), donde $E(x)$ toma respectivamente los valores 0, 1 y 2.

Como acabamos de ver, $E(x)$ no puede tener primitiva en los puntos en que tiene discontinuidad de salto ($x = 1$ y $x = 2$) y, efectivamente, la función F no es derivable en esos puntos pues tiene en ellos un punto anguloso. Se cumple así lo afirmado por la condición necesaria.

Ejercicio. Sea la función parte decimal en el intervalo $[0, 3]$. Calcula su primitiva en los intervalos en que dicha primitiva exista.

1.2. La integral de Riemann

1.2.1. Partición de un intervalo

Dado un intervalo $I = [a, b]$, lo dividimos en n partes (iguales o distintas), intercalando $n-1$ puntos entre a y b. Se llama partición al conjunto de puntos:

$$P(x_0, x_1 \dots x_n) \,/\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Relación entre particiones. Sean P y P'. Si todo punto de P está en P', se dice que P' es más fina que P o que P está contenida en P' $(P \subset P')$.
Se llama **diámetro** de P a la longitud de la mayor de las n partes en que se divide I:

$$\delta(P) = \text{máx}(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots n$$

La longitud de cada parte (o subintervalo) suele denotarse como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ejercicio. Comprueba que la relación $\subset$ entre particiones de I es de orden parcial.

1.2.2. Sumas de Darboux

Sea f, acotada en $I = [a, b]$. Sea una partición P de I. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ llamamos M_i al supremo y m_i al ínfimo de los valores de la función:

$$M_i = \sup f(x), \quad m_i = \text{ínf}\, f(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]_{i=1,2,\dots n}$$

Llamamos M y m respectivamente al supremo y el ínfimo de f en todo el intervalo:

$$M = \sup f(x), \quad m = \text{ínf}\, f(x), \quad x \in [a, b]$$

Entre los extremos de f en cualquier subintervalo y en el intervalo I se da la relación:

$$m \le m_i \le M_i \le M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de donde, multiplicando cada término por Δx_i y sumando para $i = 1, 2, \dots, n$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i \tag{1.1}$$

En el primero y cuarto términos, sacamos factor común a m y M, y sumamos los Δx_i, obteniendo respectivamente $m(b-a)$ y $M(b-a)$.
Los términos segundo y tercero (suma de los productos de las longitudes de los subintervalos por los valores extremos de f en ellos), se llaman respectivamente **suma inferior y suma superior de Darboux** para la partición P del intervalo I:

$$\boxed{s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i} \quad ; \quad \boxed{S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}$$

y la desigualdad (1.1) se convierte en

$$\boxed{m(b-a) \le s(P) \le S(P) \le M(b-a)} \tag{1.2}$$

que se cumple para toda partición P de I.

Propiedades. Las sumas de Darboux cumplen las propiedades siguientes (la primera es inmediata y se demuestra la tercera):

a) S y s están acotadas, superiormente por $M(b-a)$ e inferiormente por $m(b-a)$.

b) Al tomar una partición P', más fina que P, la suma superior decrece y la inferior crece:

$$P \subset P' \Longrightarrow S(P) \geq S(P'), \quad s(P) \leq s(P')$$

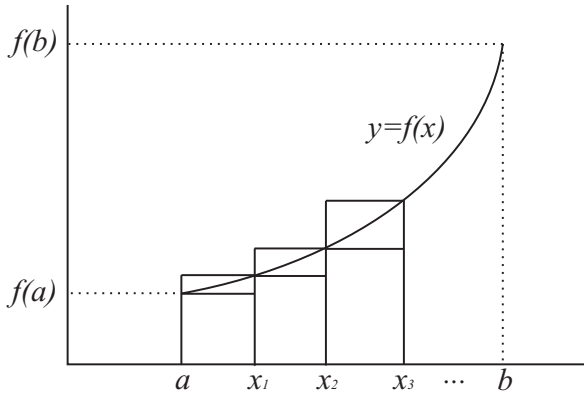
c) Cualquier suma superior es mayor o igual que cualquiera inferior:

$$\forall P_1, P_2 \Longrightarrow S(P_1) \geq s(P_2)$$

Demostración. Definimos $P = P_1 \cup P_2$, con lo que $P_1 \subset P$ y $P_2 \subset P$. Entonces, aplicando la propiedad **b)** (entre sumas correspondientes a distintas particiones) y la relación (1.2), resulta:

$$S(P_1) \geq S(P) \geq s(P) \geq s(P_2) \Longrightarrow S(P_1) \geq s(P_2), \quad \forall P_1, P_2$$

En la siguiente figura, las áreas de los rectángulos que contienen el área bajo la curva por exceso y por defecto representan las sumas de Darboux superior e inferior, respectivamente.



1.2.3. Función integrable según Riemann

Tomamos ahora particiones $P_1, P_2, \ldots, P_m$, cada vez más finas, de modo que $\delta(P_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Obtendremos dos sucesiones de sumas de Darboux $\{S_m\}$ y $\{s_m\}$ y, aplicando la propiedad **b)**, se cumplirá:

- Las S_m forman una sucesión decreciente acotada inferiormente, luego convergen a un límite S, que se llama integral por exceso de f en I.

- Las s_m forman una sucesión creciente acotada superiormente, luego convergen a un límite s, que se llama integral por defecto de f en I.

(m es el subíndice de las distintas particiones y las sumas de Darboux correspondientes, por lo que no representa el número de puntos. Pero, si $m \to \infty$, el número de puntos también lo hace).
Decimos que f es integrable según Riemann en I si y sólo si $S = s$. En este caso, a ese valor común se le llama Integral definida de Riemann de f en $[a, b]$:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$$

A partir del proceso seguido, observamos que, si f tiene signo constante entre a y b, el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje x es:

$$A_a^b = I \,(\text{si } f > 0); \quad A_a^b = -I \,(\text{si } f < 0)$$

Si f no tiene signo constante, la integral nos da el valor del **área neta**, en la que las partes por encima del eje x tienen signo positivo y las situadas por debajo, negativo.

Ejercicio. **a)** Demuestra que $y = E(x)$ es integrable en $[5/4, 7/4]$. **b)** Demuestra que la función de Dirichlet no es integrable.

1.2.4. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad

La condicion de integrabilidad enunciada consiste en que, al tomar particiones cada vez más finas, coincidan los límites de S_m y s_m, o que el límite de su diferencia sea nulo.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = I \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$$

Podemos expresar lo anterior diciendo que la diferencia entre los términos respectivos de ambas sucesiones se haga tan pequeña como queramos, si la partición es suficientemente fina, es decir:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists P \,/\, S(P) - s(P) < \varepsilon$$

Esta condición se cumplirá también para cualquier partición más fina que P.
Teniendo en cuenta las expresiones de ambas sumas, vistas en **1.2.2**,

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ;\ S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

llegamos a la condición buscada: *Es condición necesaria y suficiente para que una función f, acotada en $[a, b]$, sea integrable en $[a, b]$ que*:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \,/\, \boxed{S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon}$$

siendo $M_i = \sup f(x),\ m_i = \text{ínf}\, f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]_{i=1,2,\ldots n}$

1.2.5. Condiciones suficientes de integrabilidad

Tres casos particulares en los que se cumple la condición anterior son los siguientes:

a) Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función parte entera.

b) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función seno.

c) Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función parte decimal (f es continua a trozos en $[a, b]$ si tiene en $[a, b]$ un número finito de puntos de discontinuidad, en ellos existen los límites laterales y son finitos).

Puede verse la demostración en el documento de apoyo **6.1**.

Ejercicio. Encuentra ejemplos de funciones integrables en un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$: a) continua no monótona; b) monótona no continua; c) continua y monótona; d) no monótona ni continua.

1.2.6. Propiedades de la integral de Riemann

a) Sea f integrable en $[a, b]$, $a < b$. Se define:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx} \text{ de donde se obtiene } \boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

b) Sea f integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ y su integral es la suma de las integrales.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

La aditividad respecto al intervalo se cumple también aunque c no esté entre a y b. En efecto, sea f integrable en $[\alpha,\beta]$ y sean $a,b,c \in [\alpha,\beta] \,/\, a<b<c$. Entonces:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \overset{\text{a)}}{=} \int_a^b - \int_c^b \Longrightarrow \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

c) Sean f,g integrables en $[a,b]$. Se cumple:

c.1. La combinación lineal de f y g es integrable en $[a,b]$. Su integral es la combinación lineal de las integrales.

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx} \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

c.2. El producto $\boxed{f \cdot g}$ es integrable en $[a,b]$.

c.3. Si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el cociente $\boxed{f/g}$ es integrable en $[a,b]$.

c.4. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

d) Si f es integrable en $[a,b]$, su valor absoluto $|f|$ también lo es y se cumple:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

1.3. Teorema de la media

Sea una función f, continua en $[a,b]$. Se cumple:

$$\exists\, \xi \in [a,b] \,/\, \boxed{f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Interpretación gráfica. Existe un valor de f que, multiplicado por la longitud del intervalo, nos da el área neta bajo la curva (ver fig. 1.1.a, donde se utiliza t en lugar de ξ).

Demostración. Al ser f continua en $I=[a,b]$, se cumple que: 1) alcanza en I un máximo M y un mínimo m (Weierstrass) y 2) es integrable en I (condición suficiente de integrabilidad). Entonces existe la integral de f entre a y b y resulta (apdo. **1.2.2**):

$$m(b-a) \,\leq\, \int_a^b f(x)dx \,\leq\, M(b-a) \Longrightarrow m \,\leq\, \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \,\leq\, M$$

La expresión acotada entre m y M es un valor comprendido entre dos que toma la función. Por la propiedad de Darboux del valor intermedio, si f alcanza los valores M y m, alcanzará cualquier valor comprendido entre ambos, es decir:

$$\exists\, \xi \in [a,b] \,/\, f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1,3]$. Suponiendo conocida la regla de Barrow (**1.4.3**), obtenemos el valor ξ:

$$f(\xi) = \xi^2 - 1 = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (x^2-1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x\right)_1^3 = \frac{10}{3} \Longrightarrow \xi = \sqrt{13/3}$$

Ejercicio. Calcula ξ en $[1,3]$ para $f(x) = 2x + 1$, justificando gráficamente el resultado.

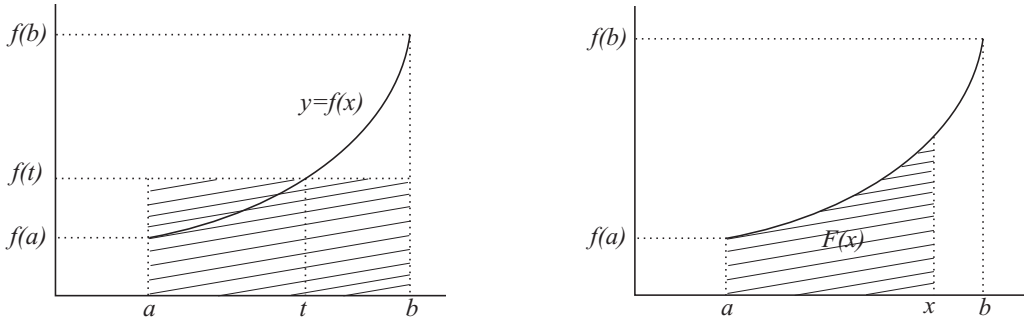


Figura 1.1: a) Teorema de la media. b) Función integral.

1.4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

1.4.1. Función integral

Sea la función f, integrable en $[a,b]$. Como hemos visto, el área neta limitada por la curva y el eje de abscisas entre dos puntos se obtiene calculando la integral de f entre dichos puntos. Por otro lado, el área entre el extremo a del intervalo y un punto cualquiera x, será función del valor de x. Definimos entonces la función integral:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

que nos da el valor del área neta desde el extremo del intervalo hasta el punto x (fig. 1.1.b).

Continuidad. La función integral es continua en $[a,b]$. Para demostrarlo, veamos que cumple la condición de continuidad en un punto cualquiera x_0 del intervalo.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

El segundo sumando está acotado, pues (apdo. **1.2.2**):

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)dt \leq M(x - x_0), \quad m = \text{ínf}(f),\ M = \sup(f),\ t \in [a,b]$$

Si además $x \to x_0$, ambas cotas tienden a 0, con lo que la integral tiende también a 0. Entonces, tomando límites, resulta:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}\left(F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt\right) = F(x_0), \quad \forall x_0 \in [a,b]$$

por lo que $F(x)$ es continua en $[a,b]$.

1.4.2. Teorema

Si f es continua en $[a,b]$, F es derivable en $[a,b]$ y se cumple $F' = f$.

Esto significa que la función integral F de una función continua f es primitiva de f.

Demostración. Para calcular $F'(x)$, obtenemos primero ΔF.

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x+h} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Dividiendo entre h y aplicando el teorema de la media,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=f(\xi),\quad \xi\in[x,x+h]$$

Si ahora hacemos que h tienda a 0, $x+h$ tenderá a x, por lo que también ξ tenderá a x, al estar comprendido entre x y $x+h$. Pero, al ser f continua, si $\xi\to x$, entonces $f(\xi)\to f(x)$.
Así pues, tomando límites, resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)\Longrightarrow \boxed{F'(x)=f(x)}$$

Como consecuencia de este teorema, toda función continua tiene primitiva. Pero dicha primitiva no tiene necesariamente que estar formada por un número finito de términos: puede ser una serie de potencias, como veremos en el Tema 4.

1.4.3. Corolario. Regla de Barrow

Si f es continua en $[a,b]$ y g es primitiva de f, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)}$$

Demostración. Al ser f continua, tiene como primitiva a su función integral F. Por hipótesis, g es también primitiva de f. Entonces la diferencia de ambas será una constante, con lo que:

$$F(x)-g(x)=K\Longrightarrow F(b)-g(b)=F(a)-g(a)=0-g(a)$$

pues $F(a)=\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$. Por lo tanto,

$$F(b)=\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)$$

Ejemplo. Obtenemos la función integral de la función coseno en $[0,2\pi]$ y calculamos el área limitada por la curva y OX entre $x_1=\pi/2$ y $x_2=3\pi/2$.

$$F(x)=\int_0^x \cos t\,dt=\operatorname{sen} t\Big|_0^x=\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 0=\operatorname{sen} x$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\operatorname{sen} 3\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1-1=-2\Longrightarrow A\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=|-2|=2$$

Como el coseno es negativo entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, el área es el valor absoluto de la integral.
Vemos que el área neta entre dos puntos es la diferencia entre los valores de $F(x)$ en ambos.
Este resultado era de esperar, pues $\displaystyle\int_b^c f(x)dx=\int_0^c f(x)dx-\int_0^b f(x)dx=F(c)-F(b)$.

Ejercicio. Si $I=[0,\pi/4]$, obtén la función integral y el área comprendida entre los extremos:
a) $f_1(x)=3x^2$ $\big(F_1(x)=x^3,\ A_1=\pi^3/64\big)$; **b)** $f_2(x)=\tan x$ $\big(F_2(x)=-\ln\cos x,\ A_2=\ln\sqrt{2}\big)$.

1.5. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es integrable en $[a,b]$ y existe $g \,/\, g' = f$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Este teorema puede considerarse una generalización de la Regla de Barrow, pues permite calcular la integral de f entre a y b como diferencia de los valores de una primitiva suya g en dichos puntos. Pero ahora sólo se pide que f sea integrable y tenga primitiva, lo que no exige que f sea continua (véase el apdo. **1.1.2**).

El teorema se demuestra en el documento de apoyo **6.2**.

1.6. Integrales impropias

Hemos obtenido la integral definida para funciones acotadas en intervalos cerrados, por tanto compactos. Si el intervalo no es compacto o f no está acotada en él, llamamos impropias a esas integrales y las resolvemos con un paso al límite. Es decir, calculamos el límite del valor de la integral cuando uno de los extremos de integración tiende a infinito o bien al punto en que f no está definida.

Ejemplo. Calculamos la integral de $f(x) = 1/x^2$: **a)** entre 0 y 1; **b)** entre 1 e ∞.

a) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(-1+\frac{1}{a}\right) = +\infty$$

b) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

El resultado de **b)** se puede interpretar geométricamente diciendo que el triángulo mixtilíneo determinado por la curva y el eje x a partir de $x = 1$ tiene perímetro infinito, pero área finita. En cambio, en el caso **a)** tanto el área como el perímetro de la figura son infinitos.

Ejercicio 1. Integra $f(x) = 1/\sqrt{x}$: **a)** entre 0 y 1 ($I = 2$); **b)** entre 1 e ∞ ($I = \infty$).

Ejercicio 2. **a)** Comprueba que la integral de $f(x) = e^x$ entre $-\infty$ y 0 vale $I = 1$; y que la de $g(x) = \ln x$ entre 0 y 1 vale $I = -1$. **b)** Teniendo en cuenta que el logaritmo neperiano es la función inversa de la exponencial de x, razona si era esperable el resultado obtenido.

1.7. Ejercicios de autoevaluación

1.7.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Una función discontinua en $I = [a,b]$ puede tener primitiva en I. Esta debe ser continua.
2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de salto en el punto $a \in I$, la función no tiene primitiva en I. Es decir, no existe ninguna función $F : I \to \mathbb{R} \;/\; F' = f$ en I.
3. Una función es integrable en $I = [a,b]$ si y sólo si es continua.

4. Si f y g son integrables en $I = [a, b]$, y se cumple $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in I$, entonces: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

5. Si f es continua en $I = [a, b]$, su función integral F es primitiva de f en I.

6. La Regla de Barrow puede aplicarse a la función parte entera de x.

1.7.2. Cuestión

Hemos obtenido el concepto de integral definida para funciones acotadas en un intervalo compacto. ¿Cómo procedemos para estudiar la integral de una función en un intervalo no acotado? Aplíquese a la integral impropia $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

1.7.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V**. Una función discontinua en $I = [a, b]$ puede tener primitiva en I, siempre que la discontinuidad no sea de salto (véase el apdo. **1.1.2**). Pero si la función tiene primitiva, esta será derivable y por tanto continua.

2. **V**. La derivada de una función puede ser discontinua, siempre que la discontinuidad no sea de salto. Entonces, si f tiene una discontinuidad de salto, no puede ser la derivada de otra función, luego no tendrá primitiva (véase el apdo. **1.1.3**).

3. **F**. Si f es continua, es integrable; pero no viceversa. Por ejemplo, la función parte decimal $y = x - E(x)$ es discontinua en los puntos correspondientes a valores enteros de x. Y es integrable entre a y b, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (véase el apdo. **1.2.5**).

4. **V**. La integración de funciones conserva el orden (véase el apdo. **1.2.6**).

5. **V**. Es lo que afirma el primer Teorema Fundamental del Cálculo (véase el apdo. **1.4**).

6. **F**. La Regla de Barrow se aplica a funciones continuas.

1.7.4. Solución de la cuestión

En estos casos obtenemos la integral definida en un intervalo cerrado, sustituyendo el extremo no acotado por un valor genérico. Luego se calcula el límite de la expresión resultante, cuando el extremo tiende a infinito. Si existe límite finito, la integral impropia es convergente.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{m\to-\infty} \int_m^0 e^x dx = \lim_{m\to-\infty} \left(e^0 - e^m\right) = 1 - \lim_{m\to-\infty} e^m = 1 - 0 = 1$$

Tema 2

Funciones vectoriales

2.1. Introducción. Tipos de funciones

Hasta ahora hemos trabajado con funciones reales de variable real, es decir que tanto la variable x como su imagen $f(x)$ son números reales. A continuación estudiaremos funciones vectoriales de variable vectorial, done tanto la variable $\vec{x}$ como su imagen $\vec{f}(\vec{x})$ son vectores. Suponemos conocido el concepto de vector, así como el de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con sus operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector. Así pues, consideraremos las funciones siguientes:

$$\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \implies \vec{x}\to\vec{f}(\vec{x}),\ \text{siendo } \vec{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix},\quad \vec{f}(\vec{x})=\begin{Bmatrix}f_1(x_1\dots x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1\dots x_n)\end{Bmatrix}$$

Antes de estudiar el caso general, veremos dos casos particulares, las funciones vectoriales de variable real y las funciones reales de variable vectorial.

Nota. Un vector se puede denotar en negrita ($\mathbf{v}$) o con una flecha ($\vec{v}$). Asimismo sus componentes se pueden escribir como fila o como columna. La primera forma suele ser más cómoda y la segunda más clara, por ejemplo al desarrollar la expresión de $\vec{f}(\vec{x})$. En ocasiones convendrá escribirlo como columna, por ejemplo al premultiplicarlo por una matriz.

2.2. Espacio euclídeo

Repasamos a continuación algunos conceptos de Álgebra que vamos a utilizar en el tema.
Sea $\mathbb{R}^p$ el conjunto de las agrupaciones de p números reales a los que denominaremos vectores de p componentes.

$$\mathbb{R}^p=\big\{(x_1,\dots,x_p)\,/\,x_i\in\mathbb{R};\ i=1,2\dots p\big\}$$

Se demuestra que $\mathbb{R}^p$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. A continuación definimos tres aplicaciones, producto escalar, norma y distancia.

2.2.1. Producto escalar ordinario

Es una aplicación de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, que asocia un número real a cada par de vectores.
Dados $\vec{x}=(x_1,\dots,x_p)$ e $\vec{y}=(y_1,\dots,y_p)$, su producto escalar es:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+\dots+x_py_p$$

Propiedades. (Son las propiedades constitutivas de cualquier producto escalar).

a) Positividad: $\vec{x}\cdot\vec{x}>0,\ \forall\vec{x}\neq\vec{0};\quad \vec{0}\cdot\vec{0}=0.$

b) Conmutatividad: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x},\ \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^p.$

c) Distributividad de $\cdot$ respecto a $+$: $\vec{x}\cdot(\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})+\beta(\vec{x}\cdot\vec{z}),\ \forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^p;\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Llamamos **espacio euclídeo** a un espacio vectorial dotado del producto escalar ordinario.

2.2.2. Norma euclídea

Es una aplicación (también llamada módulo) de $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, que asocia un número real positivo o nulo a cada vector $\vec{x}\in\mathbb{R}^p$:

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_p)^2}$$

Propiedades.

a) Positividad: $\|\vec{x}\|>0,\ \forall\vec{x}\neq\vec{0};\quad \|\vec{0}\|=0.$

b) Producto por un escalar: $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\,\|\vec{x}\|,\ \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^p,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$

c) Desigualdad triangular: $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|,\ \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^p$ (demostración en **6.3.2**).

2.2.3. Distancia euclídea

Es una aplicación de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, que asocia un número real positivo o nulo a cada par de vectores $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^p$:

$$d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_p-y_p)^2}$$

Propiedades.

a) Positividad: $d(\vec{x},\vec{y})>0,\ \forall\vec{x}\neq\vec{y};\quad d(\vec{x},\vec{x})=0.$

b) Simetría: $d(\vec{x},\vec{y})=d(\vec{y},\vec{x}),\ \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^p.$

c) Desigualdad triangular: $d(\vec{x},\vec{z})\leq d(\vec{x},\vec{y})+d(\vec{y},\vec{z}),\ \forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^p$ (demostración en **6.3.3**).

2.3. Funciones vectoriales de variable real

Un primer caso particular son las funciones de m componentes, cada una de ellas función de una variable. El punto genérico $a\in D$ debe tener puntos del dominio tan próximos como se quiera, para poder calcular el límite de $\vec{f}$ cuando $x\to a$, luego ha de ser de acumulación de D.

$$\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m,\quad D\subset\mathbb{R},\quad a\in D'\cap D$$

Ejemplo. El vector de posición, función del tiempo: $\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.
Estas funciones son vectores de m componentes, cada una de ellas función de una variable, definidas en un dominio D. El punto genérico $a\in D$ debe tener puntos de D tan próximos como se quiera, para poder calcular el límite de $\vec{f}$ cuando $x\to a$, luego debe ser de acumulación de D.

$$\boxed{\vec{f}:D\to\mathbb{R}^m,\quad D\subset\mathbb{R},\quad a\in D'\cap D}$$

Veamos que **un vector tiene límite si y sólo si lo tienen cada una de sus m componentes**.

Demostración. Sea $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)$ y sea $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$. Decimos que $\vec{x}$ tiene límite $\vec{a}$ (cuando $t \to t_0$), si $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ puede hacerse tan pequeño como queramos (para t suficientemente cerca de t_0), es decir, si

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$$

Por otro lado, cada componente $x_j(t)$ tiene límite a_j (cuando $t \to t_0$), si $|x_j - a_j|$ puede hacerse también tan pequeño como queramos (para t suficientemente cerca de t_0), es decir, si

$$|x_j - a_j| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Estudiamos la relación que existe entre $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ y $|x_j - a_j|$.

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} \geq \begin{cases} \sqrt{(x_1 - a_1)^2} = |x_1 - a_1| \\ \vdots \\ \sqrt{(x_m - a_m)^2} = |x_m - a_m| \end{cases}$$

Es decir:

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| \geq |x_j - a_j|\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Entonces, si $t \to t_0$, resulta que:

1) Si $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon$, entonces $|x_j - a_j| < \varepsilon$.

2) Si $|x_j - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, entonces $\|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (x_j - a_j)^2} \ < \ \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon.$

Luego un vector $\vec{x}$ tiene límite $\vec{a} = \{a_j\}_{j=1,\ldots,m}$ si y sólo si cada componente x_j tiene límite a_j. Este resultado permite reducir el estudio del límite de una función vectorial al de los límites de sus componentes. Además, las condiciones de continuidad y diferenciabilidad se expresan en forma de límite, por lo que **una función vectorial cumplirá estas condiciones si y sólo si las cumple cada una de sus componentes**.

2.3.1. Límite

Decimos que una función $\vec{f}$ tiene límite $\vec{\varphi}$ en $x = a$ si para valores de x suficientemente próximos a a, $\vec{f}(x)$ está tan cerca de $\vec{\varphi}$ como queramos. Es decir:

$$\lim_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{\varphi} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \|\vec{f}(x) - \vec{\varphi}\| < \varepsilon$$

Como acabamos de ver, este límite existe si existe el de cada componente, luego el límite de la función vectorial $\vec{f}$ es un vector cuyas componentes son los límites de las componentes de $\vec{f}$:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \vec{f}(x) = \Big\{\lim_{x \to a} f_j(x)\Big\}_{j=1,\ldots,m}}$$

2.3.2. Continuidad

La condición de continuidad en forma de límite dice que $\vec{f}$ es continua en a si su límite cuando $x \to a$ coincide con $\vec{f}(a)$. Pero esto equivale a que el límite de cada componente de $\vec{f}$ sea la correspondiente componente de $\vec{f}(a)$, por lo que cada componente debe ser continua en a:

$$\boxed{\vec{f}\,\text{continua en}\,a} \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{f}(a) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f_j(x) = f_j(a)\,{}_{j=1,\ldots,m} \Longleftrightarrow \boxed{f_j\,\text{continua en}\,a}$$

2.3.3. Diferenciabilidad

Sea a un punto interior del dominio D de $\vec{f}$. Cada una de las m componentes f_j de $\vec{f}$ es una función real de variable real, por lo que su condición de diferenciabilidad en a es:

$$f_j(x) - f_j(a) = [g_j + \varepsilon_j(x-a)](x-a) \quad \left(\text{siendo } g_j = \frac{df_j}{dx}(a) \text{ y } \lim_{x\to a} \varepsilon_j(x-a) = 0\right)$$

La condición de diferenciabilidad de $\vec{f}$ en a se obtiene componiendo las condiciones para las m componentes, es decir escribiendo la condición para $j = 1, 2, \ldots, m$ y agrupando los distintos términos f_j como $\vec{f}$, g_j como $\vec{g}$, etc. Resulta:

$$\boxed{\vec{f}(x) - \vec{f}(a) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(x-a)](x-a)} \quad \left(\lim_{x\to a} \vec{\varepsilon}(x-a) = \vec{0}\right)$$

El vector $\vec{g}$ es la derivada de $\vec{f}$. La diferencial de $\vec{f}$ es el producto de $\vec{g}$ por la diferencial de x.

$$\boxed{\vec{g} = \frac{d\vec{f}}{dx}(a)}; \quad \boxed{d\vec{f} = \vec{g}\,dx}; \quad \{g_j\}_{j=1,\ldots,m} = \left\{\frac{df_j}{dx}\right\}_{j=1,\ldots,m}$$

Ejemplo. Sea el vector de posición $\vec{r}(t) = \{t, 2t^2, 3t^3\}$. Estudiamos en $t = 1$ su límite, su continuidad, su derivada y su diferencial.

a) $\lim_{t\to 1} \vec{r}(t) = \{1, 2, 3\} = \vec{r}(1)$. Cada componente, y por tanto $\vec{r}(t)$, es una función continua.

b) $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \{1, 4t, 9t^2\}$; $d\vec{r} = \vec{v}\,dt = \{dt, 4tdt, 9t^2dt\}$.

Ejercicio. Haz lo mismo con $\vec{r}(t) = \left\{\sqrt{t}, 2/t, \operatorname{sen} 3t\right\}$.

2.4. Funciones reales de variable vectorial

Un segundo caso particular son las funciones reales cuya variable es un vector de n componentes. Como en **2.3**, el punto $\vec{a} \in D$ debe ser de acumulación de D.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad a \in D' \cap D$$

Ejemplo. La función temperatura de cada punto del dominio: $T(\vec{r}) = T(x, y, z)$.

2.4.1. Límite

a. Límite funcional

Decimos que una función f tiene límite φ en $\vec{x} = \vec{a}$ si para valores de $\vec{x}$ suficientemente próximos a $\vec{a}$, $f(\vec{x})$ está de φ tan cerca como queramos, es decir:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \varphi \Longleftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Longrightarrow |f(\vec{x}) - \varphi| < \varepsilon}$$

b. Límite direccional

Al tener más de una variable, podemos acercarnos al punto $\vec{a}$ a través de distintos subconjuntos, es decir dando valores a $\vec{x}$ sólo en dichos subconjuntos. El más sencillo está formado por cualquiera de las rectas que pasan por $\vec{a}$, de vector unitario $\vec{\omega}$. En ellas, $\vec{x}$ toma la forma $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\omega}$ y el límite direccional se obtiene haciendo $\lambda \to 0$:

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega})}$$

Ejemplo con dos variables. Límite direccional en $(0,0)$ de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$

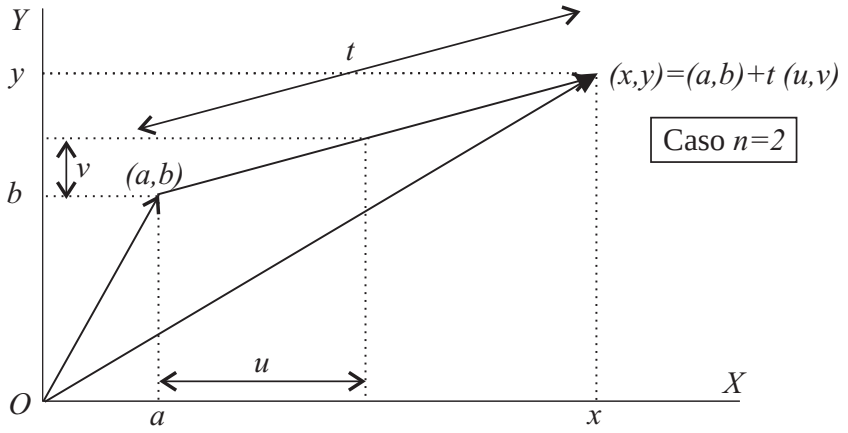
La figura muestra el plano XY (que contiene a la variable vectorial), la variable $\vec{x}=(x,y)$ y el punto $\vec{a}=(a,b)$. Se usan (u,v) como componentes del unitario $\vec{\omega}$ y el parámetro t en lugar de λ. Si $(a,b)=(0,0)$, un punto genérico (x,y) en función de $\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y)$ será:

$$(x,y)=(0,0)+\lambda(\omega_x,\omega_y)\Longrightarrow x=\lambda\omega_x,\ y=\lambda\omega_y$$

Entonces:

$$L=\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a}+\lambda\vec{\omega})=\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda\omega_x}{\lambda\omega_x+\lambda\omega_y}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\cancel{\lambda}\omega_x}{\cancel{\lambda}(\omega_x+\omega_y)}=\frac{\omega_x}{\omega_x+\omega_y}$$

Vemos que L depende de la dirección: Si $\vec{\omega}=(1,0)$ (nos acercamos por el eje OX), $L=1$. Si $\vec{\omega}=(0,1)$ (nos acercamos por el eje OY), $L=0$. Si $y=x$, $L=1/2$.



Ejercicio. En el ejemplo anterior, el límite en el origen según el eje y vale 0. ¿Hay alguna otra dirección según la cual sea nulo? ¿Según qué dirección el límite en $(0,0)$ vale $L=-1$?

c. Relación entre el límite funcional y los direccionales

Si se cumple la condición de límite funcional, debe cumplirse cuando nos aproximamos al punto por cualquier subconjunto particular. Esto significa que:

- Si existe límite funcional, existen los direccionales y coinciden.
- Si los direccionales no existen o no coinciden, no existe límite funcional.
- Si los direccionales existen y coinciden, **puede** existir el límite funcional. Si existe, tomará ese valor.

d. Obtención del límite funcional en dos variables

Como vemos, en ciertos casos se puede asegurar que el límite funcional no existe; en otros que, si lo hace, toma un determinado valor, lo que no nos asegura que exista.

En funciones de dos variables, podemos estudiar directamente la existencia –o no– de límite, usando coordenadas polares con el polo en el punto $\vec{a}=(a,b)$. Para asegurar que $\vec{x}\to\vec{a}$ por cualquier trayectoria, imponemos la condición de que $\rho\to 0$, dejando libre el valor de θ, y estudiamos el límite de $f(\rho,\theta)$. Es decir, escribimos $x-a=\rho\cos\theta,\ y-b=\rho\operatorname{sen}\theta$ y calculamos:

$$\lim_{\rho\to 0} f(a+\rho\cos\theta,b+\rho\operatorname{sen}\theta)$$

Si este límite existe para cualquier valor de θ, habremos demostrado que existe límite, sea cual sea el modo de aproximación a (a,b), por lo que la función tiene límite en dicho punto.

Ejemplo. Estudiamos en el origen los límites direccionales y funcional de

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Límites direccionales. Al ser $(a,b)=(0,0)\Longrightarrow(x,y)=(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)$. Por lo tanto,

$$\lim_{\lambda\to0}f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda^3\omega_y^3}{\lambda^2(2\omega_x^2+\omega_y^2)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda\,\omega_y^3}{1+\omega_x^2}=0$$

luego puede existir límite funcional, en cuyo caso será nulo.

b) Límite funcional. Haciendo $x=0+\rho\cos\theta,\ y=0+\rho\operatorname{sen}\theta$, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{\rho\to0}f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2(2\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho\operatorname{sen}^3\theta}{1+\cos^2\theta}=0,\forall\theta$$

Pueden verse otros ejemplos en el documento de apoyo **6.4**.

Ejercicio. Comprueba que la función g tiene límites direccionales y funcional nulos en $(0,0)$.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2.4.2. Continuidad

Decimos que f es continua en $\vec{x}=\vec{a}$ si su límite cuando $\vec{x}\to\vec{a}$ coincide con $f(\vec{a})$, es decir:

$$\boxed{f\text{ es continua en }\vec{a}\Longleftrightarrow\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}f(\vec{x})=f(\vec{a})}$$

2.4.3. Derivada direccional y derivada parcial

Como paso previo al estudio de la condición de diferenciabilidad de una función analizaremos los conceptos de derivada direccional y parcial en un punto $\vec{a}$ interior del dominio, $\vec{a}\in\mathring{D}$.

a. Derivada direccional.

Como ya hicimos en el estudio del límite direccional, nos aproximaremos al punto $\vec{a}$ a lo largo de una de las rectas que pasan por él. Para ello, hacemos $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{\omega}$, siendo $\vec{\omega}$ unitario.
Definimos la derivada direccional de f en $\vec{a}$ según la dirección dada por $\vec{\omega}$, como:

$$\boxed{D_{\vec{\omega}}f(\vec{a})=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{\omega})-f(\vec{a})}{\lambda}}$$

La diferencia $\vec{x}-\vec{a}$ es igual a $\lambda\vec{\omega}$, de módulo $|\lambda|$. Si $\lambda>0$, $\vec{x}$ se encuentra, respecto de $\vec{a}$, en el lado indicado por el sentido de $\vec{\omega}$. Si $\lambda<0$, está en el lado opuesto. Es decir, nos acercamos a $\vec{a}$, a lo largo de una recta, desde los dos lados posibles, como en las derivadas laterales de funciones de una variable (con la diferencia de que ahora existen infinitas direcciones dadas por $\vec{\omega}$).
Obsérvese que λ representa la distancia entre $\vec{x}$ y $\vec{a}$ con signo: positivo si $\vec{x}$ está en el sentido de $\vec{\omega}$, negativo en caso contrario.

Ejemplo. Calculamos la derivada direccional en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Al ser $\vec{a}=(0,0)$, $\vec{a}+\lambda\vec{\omega}=(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)$ y la derivada direccional $D_{\vec{\omega}}f(\vec{a})$ vale:

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\left(\frac{(\lambda\omega_x)^3+(\lambda\omega_y)^3}{(\lambda\omega_x)^2+(\lambda\omega_y)^2}-0\right)\frac{1}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda^3(\omega_x^3+\omega_y^3)}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)}\frac{1}{\lambda}=\omega_x^3+\omega_y^3$$

Ejercicio. Calcula la derivada direccional en $(0,0)$ de las funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$; b) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\operatorname{sen}y+y^2\operatorname{sen}x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Solución. a) $D_{\vec{\omega}}f(0,0)=2\omega_x^3-\omega_y^3$; b) $D_{\vec{\omega}}\,g(0,0)=\omega_x^2\omega_y+\omega_y^2\omega_x$.

b. Derivada parcial

Si tomamos como vector $\vec{\omega}$ uno cualquiera de la base canónica, el vector $\vec{x}$ se acercará a $\vec{a}$ modificando sólo una componente (una variable), por lo que a este caso particular de derivada direccional se le llama derivada parcial. En dos o tres dimensiones, esto supone acercarnos al punto $\vec{a}$ según la dirección de uno de los ejes.

En el caso general, los posibles vectores y las variables que se modifican son:

$$\begin{aligned}&\vec{\omega}_1=(1,0,0\ldots0,0)\Longrightarrow\ \text{modificamos } x_1\\ &\vec{\omega}_2=(0,1,0\ldots0,0)\Longrightarrow\ \text{modificamos } x_2\\ &\quad\vdots\\ &\vec{\omega}_i=(0,\ldots1\ldots,0)\Longrightarrow\ \text{modificamos } x_i\\ &\quad\vdots\\ &\vec{\omega}_n=(0,0,0\ldots0,1)\Longrightarrow\ \text{modificamos } x_n\end{aligned}$$

con lo que la expresión de la derivada parcial respecto a la variable x_i es:

$$\boxed{D_{\vec{\omega}_i}f(\vec{a})=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(a_1,\ldots,a_i+\lambda,\ldots a_n)-f(a_1,\ldots a_n)}{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})}$$

Si $\forall\vec{x}\in D$ existe la $\partial f/\partial x_i$, se le llama función derivada parcial de f respecto de x_i (se denota también f'_{x_i}).

Si f toma la misma expresión en todo el dominio, su derivada parcial se obtiene derivando respecto a cada una de las variables y considerando constantes a las demás.

Ejemplo. Sea $u(x,y,z)=x^2yz^3$. Sus derivadas son: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xyz^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2z^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=3x^2yz^2$.

Ejercicio. Calcula en $P(-1,1)$ las derivadas parciales de las funciones:

a) $\dfrac{y}{x^2}$ $\Big(\text{Sol. }(2,1)\Big)$; b) $x\arctan y$ $\Big(\text{Sol. }(\pi/4,-1/2)\Big)$; c) $\dfrac{y}{x}e^{xy}$ $\Big(\text{Solucion: }(-2/e,0)\Big)$.

2.4.4. Diferencial

En funciones reales de una variable exigíamos como condición de diferenciabilidad que el incremento de la función se aproxime bien por una función lineal (la diferencial), producto de la derivada de la función por el incremento (o diferencial) de la variable (C. Inf. 1, apdo **4.8.2**).

En funciones de n variables procederemos análogamente, pero la derivada respecto de la variable vectorial será un vector de n componentes y la diferencial se obtendrá como un producto escalar.

Sea $\vec{a}$ un punto interior del dominio D. Decimos que f es diferenciable en $\vec{x} = \vec{a}$ si y sólo si se cumple la condición:

$$\boxed{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\vec{x} - \vec{a})] \cdot (\vec{x} - \vec{a})}$$

Si f es diferenciable, el vector $\vec{g}$ se llama derivada total de f o vector gradiente. Y la diferencial de f es el producto (escalar) de la derivada de la función por la diferencial de la variable.

$$\boxed{\vec{g} = \left.\frac{df}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}; \quad df = \vec{g} \cdot d\vec{x}}$$

Antes de calcular las componentes de la derivada total vamos a obtener la derivada de una función diferenciable según una cierta dirección.

Derivada direccional de una función diferenciable. Sustituimos en la fórmula de la derivada direccional el incremento de f por la expresión de dicho incremento en la condición de diferenciabilidad (teniendo en cuenta que $\vec{x} - \vec{a} = \lambda\omega$). Resulta:

$$D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{a} + \lambda\omega) - f(\vec{a})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{[\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\lambda\vec{\omega})] \cdot (\cancel{\lambda}\vec{\omega})}{\cancel{\lambda}} = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$$

expresión que nos dice que la derivada según una cierta dirección de una función diferenciable se obtiene como producto escalar del gradiente por el vector unitario de la dirección.

Componentes de la derivada total. Para obtenerlas, calculamos la derivada direccional respecto al vector $\vec{\omega}_i$ de la base canónica (es decir, la derivada parcial respecto a x_i), resultando:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{\vec{\omega}_i} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}_i = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) \cdot (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) = g_i$$

Es decir, cada componente g_i es la derivada parcial de f respecto a la variable x_i, por lo que la derivada total de una función diferenciable está formada por las n derivadas parciales,

$$\vec{g} = \frac{df}{d\vec{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

y a partir de ella obtenemos la diferencial de f:

$$df = \vec{g} \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \cdot \big(dx_1, \ldots, dx_n\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Ejemplo. Calculamos la diferencial en $P(1,1,1)$ de la función $u(x,y,z) = x^2 y z^3$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 2xyz^3 dx + x^2 z^3 dy + 3x^2 y z^2 dz \overset{P}{=} 2dx + dy + 3dz$$

Ejercicio. Halla la diferencial en $P(1,1,\pi)$ de las funciones de 3 variables:

a) $f = \operatorname{sen} xyz$ $(df_P = -\pi dx - \pi dy - dz)$; b) $g = \sqrt{xyz}$ $\left(dg_P = \frac{\sqrt{\pi}}{2} dx + \frac{\sqrt{\pi}}{2} dy + \frac{dz}{2\sqrt{\pi}}\right)$

2.4.5. Interpretación geométrica del gradiente y la diferencial

El vector gradiente $\vec{g}$ (o $\vec{\nabla} f$) nos indica la dirección de crecimiento más rápido de la función. Es decir, cómo debemos modificar las variables para que f crezca de la forma más rápida posible.

Demostración (para 2 ó 3 variables). El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene como producto de sus módulos (normas) por el coseno del ángulo que forman. Como la derivada de f según la dirección de $\vec{\omega}$ es el producto escalar del gradiente por $\vec{\omega}$, resulta:

$$D_{\vec{\omega}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\omega} = \|\vec{\nabla} f\| \, \|\vec{\omega}\| \cos\varphi = \|\vec{\nabla} f\| \cos\varphi$$

Este producto será máximo si el coseno vale 1, lo que corresponde a un ángulo φ nulo entre $\vec{\nabla} f$ y $\vec{\omega}$, es decir que $\vec{\omega}$ es paralelo a $\vec{\nabla} f$ (el producto valdrá 0 si $\varphi = \pi/2$). Por lo tanto, la variación de f según la dirección de $\vec{\nabla} f$ es máxima y es nula en la dirección perpendicular.

Ejemplo en 2 variables. Sea la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, cuya representación gráfica es un paraboloide con vértice en el origen. Sea $P = (1, 1)$. El vector gradiente es:

$$\vec{\nabla} f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y) \overset{P}{=} (2, 2)$$

Esto significa que, al modificar las variables (x, y) –a partir de sus valores en P– según la dirección del vector $(2, 2)$, el incremento del valor de f es máximo. Efectivamente, al movernos según dicha dirección, el punto correspondiente en la superficie sube por la línea de máxima pendiente.
Por el contrario, si nos movemos en la dirección perpendicular a $\vec{\nabla} f$ en cada punto, vamos recorriendo una curva en la que la función no varía, es decir toma el mismo valor que en $P(1, 1)$. Su ecuación será $f(x, y) = f(1, 1)$, es decir la circunferencia $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Hemos obtenido así una **curva de nivel** (*lugar geométrico de los puntos en los que la f es constante*). Así pues, el gradiente de f en P es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por P.

Interpretación geométrica de la diferencial (funciones de 2 variables). En funciones de una variable interpretábamos geométricamente la diferencial como el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva cuando la variable se incrementa $x - a$ (C. Inf. 1, apdo. **4.8.4**). La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a) = df(a)$$

En dos variables la interpretación es análoga: la diferencial representa el incremento de la coordenada vertical del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ al pasar de $P(a, b)$ a $P'(a+dx, b+dy)$. En efecto, a partir de la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$, se tiene:

$$z = f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b) \Rightarrow z-f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b) = df(a,b)$$

2.4.6. Teoremas de diferenciabilidad

Sea la función $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\vec{a}$ un punto interior del dominio. Los siguientes teoremas son muy útiles en el estudio de funciones de varias variables.

a. Condición suficiente de diferenciabilidad

Si f tiene derivadas parciales en un entorno de $\vec{a}$ y son continuas en $\vec{a}$, entonces f es diferenciable en $\vec{a}$ (si las derivadas parciales de f son continuas se dice que $f \in C^1$).

Nota. Esta condición es suficiente, pero no necesaria. De hecho, pueden exigirse menos condiciones aún: se demuestra que si las n derivadas parciales existen en un entorno de $\vec{a}$ y $n - 1$ de ellas son continuas en $\vec{a}$, f es diferenciable en $\vec{a}$.

b. Condición necesaria de diferenciabilidad

Si f es diferenciable en $\vec{a}$, sus derivadas direccionales en $\vec{a}$ existen y toman el valor siguiente (véase **2.4.4**):

$$\boxed{D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \vec{g} \cdot \vec{\omega}} \text{ siendo } \vec{g} = \left.\frac{df}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}$$

Como vemos, las derivadas direccionales dependen en general de la dirección.

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Al existir otros modos de aproximarse a un punto, la existencia de derivadas direccionales no implica la diferenciabilidad.

c. Relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Si f es diferenciable en un punto, es continua en dicho punto, pero no viceversa.

En efecto, tomando límites en la condición de diferenciabilidad,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\vec{x} - \vec{a})] \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \Longrightarrow \boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})}$$

La existencia de derivadas direccionales, que no asegura la diferenciabilidad, tampoco asegura la continuidad. Si f admite derivada en una dirección, el límite de f en $\vec{a}$ coincidirá con $f(\vec{a})$ sólo en esa dirección.

Ejemplo. Vamos a aplicar los teoremas anteriores a tres funciones, obteniendo sus derivadas parciales de distintos modos. Sean las funciones f_1, f_2 y f_3:

$$f_1 = x^2 + y^2; \quad f_2 = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; \quad f_3 = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Comprobaremos que:

1. f_1 cumple la condición suficiente de diferenciabilidad en $\vec{a}\,(1, 1)$, luego es diferenciable en dicho punto y cumple en él la condición necesaria de diferenciabilidad.
2. f_2 tiene derivadas direccionales en el origen, pero no es diferenciable en dicho punto, pues no cumple en él la condición necesaria de diferenciabilidad.
3. f_3 tiene derivadas parciales en el origen, aunque no es continua en dicho punto.

Solución.

1. $f_1 = x^2 + y^2$. Al estar definida en todo $\mathbb{R}^2$, obtenemos sus derivadas parciales directamente:

   $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$

   Las derivadas parciales son continuas (condición suficiente), por lo que f_1 es diferenciable, como ya sabíamos por ser polinómica. Su gradiente en $\vec{a}$ vale $\vec{\nabla} f_1(1, 1) = (2, 2)$.

   Calculamos la derivada direccional en $\vec{a}$,

   $$D_{\vec{\omega}} f_1(\vec{a}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f_1(\vec{a} + \lambda\vec{\omega}) - f_1(\vec{a})}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(1 + \lambda\omega_x)^2 + (1 + \lambda\omega_y)^2 - 2}{\lambda} = 2\omega_x + 2\omega_y$$

   observando que se cumple la condición necesaria de diferenciabilidad:

   $$D_{\vec{\omega}} f_1(\vec{a}) = 2\omega_x + 2\omega_y = (2, 2) \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} = \vec{\nabla} f_1(\vec{a}) \cdot \vec{\omega}$$

2. $f_2 = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Estudiamos su derivada direccional en $(0,0)$:

$$D_{\vec{\omega}} f_2(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_2(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) - f_2(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda^3 \omega_x^2 \omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)} - 0 \right) \frac{1}{\lambda} = \omega_x^2 \omega_y$$

de donde obtenemos las derivadas parciales,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = D_{(1,0)} f_2(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = D_{(0,1)} f_2(0,0) = 0$$

viendo que f_2 no es diferenciable en $(0,0)$, ya que no se cumple la condición necesaria:

$$D_{\vec{\omega}} f_2(0,0) = \omega_x^2 \, \omega_y \neq (0,0) \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{Bmatrix} = \vec{\nabla} f_2(0,0) \cdot \vec{\omega}$$

3. $f_3 = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Estudiamos su derivada direccional en $(0,0)$:

$$D_{\vec{\omega}} f_3(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_3(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) - f_3(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda^2 \omega_x \omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)} - 0 \right) \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega_x \omega_y}{\lambda}$$

Este límite no existe en general (salvo si uno de los factores ω_x, ω_y es nulo).

Obtenemos entonces las derivadas parciales en $(0,0)$, usando los unitarios $(1,0)$ y $(0,1)$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_3(h,0) - f_3(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0 \right) \frac{1}{h} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = \cdots = 0$$

Así pues, f_3 tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero se puede comprobar que no tiene límite en $(0,0)$, por lo que no es continua.

Hemos visto, pues, **tres modos de obtener las derivadas parciales**: 1) derivando la expresión de la función, 2) como caso particular de las derivadas direccionales y 3) directamente, a partir de los vectores unitarios de los ejes.

Ejercicio. Aplica lo visto en el ejemplo anterior a las funciones siguientes.

$$f_1 = x^2 + y^3; \quad f_2 = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f_3 = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d. Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad

Los teoremas anteriores nos sirven para reconocer funciones diferenciables (apdo. **a**) o bien para descartar que lo sean (apdos. **b** y **c**). Pero existen funciones continuas que no cumplen la condición suficiente de diferenciabilidad y sí la necesaria, por lo que necesitamos alguna otra condición. Para ello vamos a simplificar la expresión utilizada en la definición de función diferenciable, escribiéndola en forma de límite.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{a} \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}$. Decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si se cumple:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}] \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

Efectuamos el producto escalar del segundo miembro, recordando que el producto de $\vec{g}$ (derivada de f) por el incremento de la variable es la diferencial de f. Y que el producto de $\vec{\varepsilon}$ por $(\vec{x}-\vec{a})$ es un infinitésimo de orden superior a $(\vec{x}-\vec{a})$. Entonces:

$$f(\vec{x})-f(\vec{a})=\vec{g}\cdot(\vec{x}-\vec{a})+\vec{\varepsilon}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=df(\vec{a})+o(\vec{x}-\vec{a})$$

de donde:

$$f(\vec{x})-f(\vec{a})-df(\vec{a})=o(\vec{x}-\vec{a})$$

Al ser el término de la izquierda un $o(\vec{x}-\vec{a})$, se debe cumplir:

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\frac{f(\vec{x})-f(\vec{a})-df(\vec{a})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}=0}$$

Función de dos variables. En este caso usamos la siguiente notación (f'_x, f'_y se entienden particularizadas en $\vec{a}$):

$$\vec{x}=\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix};\ \vec{a}=\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix};\ \vec{x}-\vec{a}=\begin{Bmatrix}x-a\\y-b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}h\\k\end{Bmatrix};\ \vec{g}=\begin{Bmatrix}f'_x\\f'_y\end{Bmatrix};\ \vec{df}(\vec{a})=\begin{pmatrix}f'_x & f'_y\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}h\\k\end{Bmatrix}$$

Y la condición (necesaria y suficiente) de diferenciabilidad de f en $\vec{a}$ resulta:

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf'_x-kf'_y}{\sqrt{h^2+k^2}}=0}$$

Ejemplo. Estudiamos la diferenciabilidad en $(0,0)$ de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Calculamos las derivadas parciales en el origen:

$$f'_x=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{h^4-0}{h^2+0}-0\right)\frac{1}{h}=0;\quad f'_y=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\cdots=0$$

Al ser nulas f, f'_x y f'_y en $(0,0)$, la condición toma la forma: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{h^4-k^4}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=0$, que resolvemos usando coordenadas polares (apdo. **2.4.1, d**):

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^4\left(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta\right)}{\left[\rho^2\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)\right]^{3/2}}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^4}{\rho^3}\left(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)=0$$

con lo que f es diferenciable en el origen.

2.5. Funciones vectoriales de variable vectorial

Veremos a continuación las definiciones de límite, continuidad y diferenciabilidad en el caso general de funciones vectoriales de variable vectorial. Ello nos permitirá definir en **2.6.1** la función compuesta y analizar su continuidad y diferenciabilidad. A continuación volveremos a las funciones reales de variable vectorial para estudiar las derivadas sucesivas, el desarrollo de Taylor y el cálculo de extremos.

Sea $\vec{f}: D\to\mathbb{R}^m,\quad D\subset\mathbb{R}^n,\quad a\in D'\cap D$. Como ya se dijo en la introducción al tema, la variable $\vec{x}$ y la función $\vec{f}(\vec{x})$ toman la forma siguiente:

$$\vec{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix};\qquad \vec{f}(\vec{x})=\begin{Bmatrix}f_1(x_1\ldots x_n)\\\vdots\\f_m(x_1\ldots x_n)\end{Bmatrix}$$

2.5.1. Límite

De lo visto en el apdo. **2.3.1**, se deduce que en este tipo de funciones existe límite si y sólo si existe para cada una de las componentes, en cuyo caso :

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_m(\vec{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_m(x_1 \dots x_n) \end{Bmatrix}$$

2.5.2. Continuidad

Teniendo en cuenta lo anterior, la condición de continuidad en el punto $\vec{a}$ puede expresarse en forma de límite, del siguiente modo:

$$\vec{f} \text{ es continua en } \vec{a} \Longleftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) \Longleftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{a}),\ j = 1, \dots m$$

Luego $\vec{f}$ es continua en $\vec{a}$ si y sólo si lo son cada una de sus m componentes.

2.5.3. Diferenciabilidad

Como en el caso del límite, concluimos que estas funciones son diferenciables si y sólo si cada componente cumple la condición de diferenciabilidad (apdo. **2.3.3**), es decir:

$$\vec{f} \text{ es diferenciable en } \vec{a} \Longleftrightarrow f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{a}) = \left[\frac{df_j}{d\vec{x}} + \vec{\varepsilon}_j(\vec{x}-\vec{a})\right] \cdot (\vec{x}-\vec{a}),\ j = 1, \dots m$$

Agrupando las m condiciones, obtenemos la condición de diferenciabilidad en $\vec{a}$ para funciones vectoriales de variable vectorial:

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) = \left[G_{m\times n} + \vec{\varepsilon}_{m\times n}(\vec{x}-\vec{a})\right](\vec{x}-\vec{a})$$

donde

$$G_{m\times n} = \begin{Bmatrix} \frac{df_1}{d\vec{x}} \\ \vdots \\ \frac{df_m}{d\vec{x}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana, cuyas filas son las derivadas totales de las componentes de $\vec{f}$. La matriz $\vec{\varepsilon}_{m\times n}(\vec{x}-\vec{a})$ tiende a la matriz nula cuando $\vec{x}\to\vec{a}$. Si $\vec{f}$ es diferenciable, su diferencial se obtiene multiplicando la matriz jacobiana por el vector $d\vec{x}$, resultando:

$$d\vec{f} = \begin{Bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + & \cdots & +\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + & \cdots & +\frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{Bmatrix}$$

Si las n derivadas parciales de cada componente f_j de $\vec{f}$ son continuas, f_j será diferenciable, de modo que una condición suficiente de diferenciabilidad para $\vec{f}$ es que sus $m \times n$ derivadas parciales sean continuas.

Ejemplo. Sea la función $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, cuyas componentes son:

$$u=f_1(x,y,z)=x^2+xy+1;\quad v=f_2(x,y,z)=x+y^2;\quad w=f_3(x,y,z)=y+z^2$$

Hallamos la matriz jacobiana en $P(1,1,1)$. Utilizando notación simplificada,

$$J=\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}&\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y&x&0\\1&2y&0\\0&1&2z\end{pmatrix}\overset{P}{=}\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Como las nueve derivadas parciales son continuas, $\vec{f}$ es diferenciable. Su diferencial vale:

$$d\vec{f}_P=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}dx\\dy\\dz\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3dx+dy\\dx+2dy\\dy+2dz\end{Bmatrix}$$

2.6. Composición de funciones

2.6.1. Función compuesta. Continuidad y diferenciabilidad

Dados los conjuntos $\mathbb{R}^{n_x},\mathbb{R}^{n_y},\mathbb{R}^{n_z}$, se consideran las funciones $\vec{f}:D_x\to\mathbb{R}^{n_y}$ y $\vec{g}:D_y\to\mathbb{R}^{n_z}$, siendo $D_x\subset\mathbb{R}^{n_x}$ y $D_y\subset\mathbb{R}^{n_y}$ sus dominios.
Si $\vec{f}(D_x)\subset D_y$, definimos la función compuesta $\left(\vec{g}\circ\vec{f}\right)(\vec{x})=\vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right)=\vec{\phi}(\vec{x})$. Se verifica:

a) "*Si $\vec{f}$ es continua en $\vec{a}\in D_x$ y $\vec{g}$ lo es en $\vec{y}=\vec{f}(\vec{a})\in D_y$, la función compuesta $\vec{g}\circ\vec{f}$ es continua en $\vec{x}=\vec{a}$*".

b) "*Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a}\in D_x$ y $\vec{g}$ lo es en $\vec{y}=\vec{f}(\vec{a})\in D_y$, la función compuesta $\vec{g}\circ\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}=\vec{a}$*".

Demostración de la diferenciabilidad. Partimos de las condiciones de diferenciabilidad de $\vec{f}$ y $\vec{g}$ en $\vec{x}=\vec{a}$ e $\vec{y}=\vec{b}$ respectivamente (simbolizamos las matrices $\mathcal{E}$ con la notación $\underset{\sim}{\mathcal{E}}$):

$$\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})=\left[\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_x(\vec{x}-\vec{a})\right](\vec{x}-\vec{a}),\quad\text{siendo }\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\underset{\sim}{\mathcal{E}}_x=\underset{\sim}{\Omega}\tag{2.1}$$

$$\vec{g}(\vec{y})-\vec{g}(\vec{b})=\left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{b}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y(\vec{y}-\vec{b})\right](\vec{y}-\vec{b}),\quad\text{siendo }\lim_{\vec{y}\to\vec{b}}\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y=\underset{\sim}{\Omega}\tag{2.2}$$

Haciendo $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{b}=\vec{f}(\vec{a})$ en la condición (2.2), obtenemos:

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))-\vec{g}(\vec{f}(\vec{a}))=\left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y\left(\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\right)\right]\left(\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\right)$$

Sustituímos el factor $\left(\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\right)$ por su valor en (2.1) y operamos. Resulta un producto de corchetes, en los que omitimos las dependencias de $\varepsilon_{\vec{x}}$ y $\varepsilon_{\vec{y}}$:

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))-\vec{g}(\vec{f}(\vec{a}))=\left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y\right]\left[\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_x\right](\vec{x}-\vec{a})=$$

$$\left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}}\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}+\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}}\underset{\sim}{\mathcal{E}}_x+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}_y\underset{\sim}{\mathcal{E}}_x\right](\vec{x}-\vec{a})$$

Cuando $\vec{x}\to\vec{a}$, $\vec{f}(\vec{x})\to\vec{f}(\vec{a})$ por continuidad. Entonces los sumandos 2º, 3º y 4º del corchete tienden a la matriz nula, por lo que son expresiones del tipo $\underset{\sim}{\mathcal{E}}(\vec{x}-\vec{a})$.

El primer sumando, por su parte, representa la derivada de la función compuesta, formada por el producto de las derivadas (jacobianos) de $\vec{g}$ con respecto a $\vec{y}$ y de $\vec{f}$ con respecto a $\vec{x}$. Si $\vec{g}\circ\vec{f}=\vec{\phi}$, resulta la condición de diferenciabilidad de $\vec{\phi}$:

$$\vec{\phi}(\vec{x})-\vec{\phi}(\vec{a})=\left[\left.\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}+\underset{\sim}{\mathcal{E}}(\vec{x}-\vec{a})\right](\vec{x}-\vec{a}),$$

siendo la derivada en $\vec{x}=\vec{a}$ de la función compuesta:

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}}\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}}$$

Si lo anterior se cumple $\forall\vec{x}\in D_x$, la función compuesta es diferenciable en D_x.

2.6.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Hemos visto que la derivada de la función compuesta $\vec{\phi}=\vec{g}\circ\vec{f}$ es una matriz que se obtiene como producto de dos: la derivada de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$ por la derivada de $\vec{f}$ respecto a $\vec{x}$. Es decir, **el jacobiano de la función compuesta es el producto de los jacobianos de las funciones**.

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{n_x}}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial\phi_{n_z}}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial\phi_{n_z}}{\partial x_{n_x}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial g_1}{\partial y_{n_y}}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial g_{n_z}}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial g_{n_z}}{\partial y_{n_y}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_{n_x}}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_{n_x}}\end{pmatrix}$$

Desarrollamos ahora el producto de matrices. Observamos que el elemento (i,k) de la primera matriz (derivada de ϕ_i respecto a x_k) se obtiene multiplicando la i-ésima fila de la segunda por la $k-$ésima columna de la tercera, es decir:

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k}=\frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k}+\cdots\frac{\partial g_i}{\partial y_{n_y}}\frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{n_y}\frac{\partial g_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

lo que podemos interpretar diciendo que *la derivada de ϕ_i respecto a x_k es la suma de las derivadas obtenidas a través de todas las funciones f_j que relacionan g_i con x_k.*

Ejemplo 1. Sean las funciones $\vec{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$; $\vec{g}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$. A partir de ellas definimos la función compuesta:

$$\vec{z}=\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))=\vec{\phi}(\vec{x})$$

Tenemos:

$$\begin{Bmatrix}z_1\\z_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}g_1(y_1,y_2,y_3)\\g_2(y_1,y_2,y_3)\end{Bmatrix};\quad\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1(x_1,x_2)\\f_2(x_1,x_2)\\f_3(x_1,x_2)\end{Bmatrix}\implies\begin{Bmatrix}z_1\\z_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_1(x_1,x_2)\\\phi_2(x_1,x_2)\end{Bmatrix}$$

Las derivadas de las funciones ϕ_1, ϕ_2 respecto a las variables x_1, x_2 serán:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Estas expresiones se simplifican notablemente utilizando el nombre de las variables para representar a las funciones, es decir sustituyendo ϕ_i y g_i por z_i, f_j por y_j. Resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial z_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_2} \\
\frac{\partial z_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial z_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Conviene recordar que quienes dependen de las variables son las funciones: la función g_i, de y_j; y las funciones ϕ_i, f_j, de x_k. Y que una variable puede depender de otra según distintas funciones, que debemos especificar. Por ello, esta notación es más sencilla a costa de perder rigor.

Ejemplo 2. Sea la función $z = f(x, y) = x^2 - 3y$, siendo $x = u - v$; $\quad y = 2u + v^2$.

Hallamos las derivadas de z respecto a u y v.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cdot 1 + (-3)\,2 = 2(u - v) - 6 = 2u - 2v - 6 \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2x\,(-1) + (-3)\,2v = -2(u - v) - 6v = -2u - 4v
\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que obtenemos el mismo resultado escribiendo z como función de u y v,

$$z = \phi(u, v) = x^2 - 3y\Big|_{y=2u+v^2}^{x=u-v} = \cdots = u^2 - 2v^2 - 2uv - 6u$$

y hallando directamente sus derivadas parciales.

Nota. Un ejemplo de aplicación de la regla de la cadena es el cálculo de la derivada de la función inversa. Puede verse en el documento de apoyo **6.5**.

Ejercicio. Haz las mismas operaciones del ejemplo 2, siendo $z = xy + y^3$; $x = 2u + 1$; $y = u^2 - v$.

Caso particular. Es frecuente que una función dependa de varias variables y que una de ellas sea a su vez función de alguna de las otras. Por ejemplo:

$$z = g(x, v), \text{ siendo } v = f(x, y)$$

donde z depende de x directamente (a través de g) y también indirectamente (a través de f).

Para obtener en este caso la derivada respecto a x de la función compuesta hacemos lo siguiente:

$$z = g(x,v)|_{v=f(x,y)} = \phi(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Es decir, derivamos respecto a x los términos que dependen directamente de esa variable y tenemos en cuenta la función "intermedia" f para los que lo hacen a través de v.

Ejemplo. Sea $z = x^2 + v^3$, siendo $v = \operatorname{sen}(4x + y^2)$. Entonces:

$$z = \phi(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}^3(4x + y^2) \Longrightarrow \phi'_x = 2x + 3\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)\,4$$

La derivada respecto a y resulta:

$$\phi'_y = 3\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)\,2y = 6y\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)$$

Ejercicio 1. Deriva respecto de x y de y la función $z = \operatorname{tg} x + v^2$, siendo $v = \cos(x + 2y)$.

Solución. $\phi'_x = 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}(2x + 4y)$; $\phi'_y = -2\operatorname{sen}(2x + 4y)$.

Ejercicio 2. Deriva respecto de x y de y la función $z = x\,e^v$, siendo $v = xy^2$.

Solución. $\phi'_x = e^{xy^2} + xy^2 e^{xy^2}$; $\phi'_y = 2x^2 y\, e^{xy^2}$.

2.7. Derivadas de orden superior

2.7.1. Definición

Estudiamos a continuación las derivadas sucesivas en funciones reales de variable vectorial. Sea una función real de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, definida en un entorno del punto $\vec{a}$.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad \vec{a} \in U_{\vec{a}} \subset D$$

Si f admite derivada respecto de x_i en $U_{\vec{a}}$, en ese entorno existirá la función derivada parcial de f respecto de x_i, que denotamos $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ o bien f'_{x_i}.
Si esta función derivada parcial es derivable respecto de la variable x_j en el punto $\vec{a}$, en ese punto existirá la derivada parcial segunda respecto de x_i y de x_j de la función f, es decir:

$$\exists\, \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\vec{x}=\vec{a}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\bigg|_{\vec{x}=\vec{a}}$$

Y si esta derivada parcial segunda existe para todo $\vec{x}$ del dominio, hemos obtenido la función derivada parcial segunda de f respecto de x_i y de x_j:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = f''_{x_i x_j}$$

Reiterando este proceso, podemos obtener las derivadas parciales de f, de cualquier orden.
En el caso de dos variables existen las cuatro derivadas segundas siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

2.7.2. Derivadas cruzadas

En funciones de varias variables podemos derivar respecto a las mismas variables en distinto orden. Un caso particular en funciones de dos variables son las derivadas segundas cruzadas, es decir las derivadas segundas respecto de x y de y, en los dos órdenes posibles (f''_{xy} y f''_{yx}).
En las funciones derivables que manejamos habitualmente, observamos que el orden de derivación parece no influir. Por ejemplo:

$$f(x,y) = x^2y^5 \Longrightarrow f''_{x\,y} = f''_{y\,x} = 10xy^4$$

y lo mismo ocurre con $g(x,y) = e^{xy^2}$ o $h(x,y) = x \operatorname{sen} y^2$.
Sin embargo, si consideramos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

observamos que, fuera del origen, se cumple (compruébese):

$$f''_{x\,y} = f''_{y\,x} = \frac{y^6 + 6y^4x^2 - 3y^2x^4}{(x^2+y^2)^3}$$

Sin embargo, $f''_{x\,y}(0,0) = 1,\ f''_{y\,x}(0,0) = 0$. Luego las derivadas cruzadas no siempre coinciden.

Nota. Las derivadas segundas del caso anterior se han obtenido de la siguiente manera:

1. Calculamos f'_x y f'_y fuera del origen, derivando. Y sus valores en $(0,0)$, por la definición.
2. Obtenemos las derivadas segundas en el origen por la definición, a partir de lo obtenido en el apartado anterior:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

Los teoremas siguientes establecen condiciones suficientes para que esto ocurra.

Teorema. *Sea f, definida en $U_{\vec{a}} \subset \mathbb{R}^n$. Si las derivadas parciales de orden k en $\vec{a}$ son continuas, su valor no depende del orden de derivación.* Por ejemplo, si $n = 2$ y $f \in C^3$, se cumplirá:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x};\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Nota. Si las derivadas parciales k-ésimas de f son continuas, se dice que $f \in C^k$.

Teorema de Schwarz. *Sea f definida en $U_{\vec{a}} \subset \mathbb{R}^2$. Si en $U_{\vec{a}}$ existen las derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

y la derivada segunda es continua en $\vec{a}$, entonces existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $\vec{a}$ y se cumple:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a})$$

Obsérvese que el teorema de Schwarz no es un simple caso particular del anterior para $n = 2$, sino que exige menos condiciones.

2.7.3. Diferenciales sucesivas

Sabemos que la diferencial es una función lineal que aproxima muy exactamente Δf a partir del valor de f en $\vec{a}$, si estamos suficientemente cerca del punto. Como vimos en **2.4.4**, la diferencial de f se obtiene como combinación lineal de las diferenciales de las variables, siendo los coeficientes las correspondientes derivadas parciales:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Si cambiamos de punto, df varía, pues las derivadas parciales de f dependen en general del punto considerado. Eso significa que podemos considerar a df una función y calcular su diferencial, es decir la diferencial segunda de f:

$$d(df) = d^2 f$$

Repitiendo el proceso podemos obtener las diferenciales sucesivas. Esto nos servirá para aproximar mejor el incremento de una función en las proximidades de un punto, así como para simplificar algunas expresiones, por ejemplo en el desarrollo de una función en serie de Taylor.

Diferencial de orden p de una función de 2 variables. Sea $f(x, y)$, diferenciable. Su diferencial es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si df es diferenciable, obtenemos su diferencial multiplicando las derivadas parciales de df por las respectivas diferenciales de las variables:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy$$

Agrupando los términos que contienen los productos de las diferenciales de x e y, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

y, si las derivadas cruzadas coinciden, resulta:

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}$$

Esta expresión, que recuerda al desarrollo del cuadrado de una suma, se puede abreviar utilizando el cuadrado **simbólico**:

$$d^2 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(2}$$

Se demuestra por inducción que esta notación es válida para una diferencial de cualquier orden, luego podemos escribir:

$$\boxed{d^p f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(p}}$$

Ejemplo. La diferencial tercera de una función de 2 variables vale:

$$d^3 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

donde hemos utilizado, para desarrollarla, los coeficientes del binomio de Newton.

Diferencial de orden p de una función de n variables. Se demuestra también que la notación simbólica para las diferenciales de orden superior es válida para cualquier número de variables. Así pues, la diferencial de orden p de una función de n variables se puede expresar como:

$$d^p f(x_1, x_2, \dots x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right]^{(p}$$

Matriz hessiana. En el ejemplo hemos visto la diferencial tercera de una función de dos variables. Obtenemos ahora la diferencial segunda de una función de tres variables:

$$d^2 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right]^{(2}$$

cuyo desarrollo, suponiendo derivadas cruzadas iguales, es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz$$

lo que se puede escribir en forma matricial:

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Esta matriz se denomina matriz hessiana. Será simétrica si las derivadas cruzadas son iguales.

Ejercicio 1. Escribe la diferencial cuarta de una función de 2 variables $f(x, y)$.

Ejercicio 2. Calcula la diferencial segunda de la función $f(x, y) = x^2 y + xy^2$, particularizando en los puntos $P(1, -1)$, $Q(1, 0)$.

Solución. $d^2 f|_P = -2dx^2 + 2dy^2$; $\quad d^2 f|_Q = 2dy^2 + 4dxdy$

2.8. Desarrollo de Taylor

Dada una función de n variables, buscamos su valor en un punto $\vec{x}$, a partir de los valores –en $\vec{a}$– de f y sus sucesivas derivadas. Como hicimos en funciones de una variable, podemos aproximar este valor por medio del polinomio de Taylor de grado k o bien expresarlo exactamente como suma de dicho polinomio de grado k más el término complementario de orden k (es decir, el desarrollo limitado de Taylor de orden k).

$$f(\vec{x}) \approx P_k(\vec{x}) \; ; \quad f(\vec{x}) = P_k(\vec{x}) + T_k(\vec{x})$$

2.8.1. Expresión general

Veremos en primer lugar (sin demostración) el caso de dos variables, lo que nos servirá para obtener una expresión simplificada de los sumandos de orden k y del término complementario. Luego generalizaremos al caso de n variables.

Función de 2 variables. Sea la función f, definida en $D \subset \mathbb{R}^2$. Los puntos (a,b) y (x,y) son interiores de D y suponemos que $f \in C^{k+1}$, por lo que es $k+1$ veces diferenciable $(k \geq 1)$.

Para obtener el desarrollo de Taylor, se suman las derivadas de orden creciente, multiplicadas por los incrementos de las correspondientes variables. Por ejemplo, la derivada tercera respecto de x dos veces y de y se multiplica por $(x-a)^2(y-b)$. Entonces:

- El sumando constante del polinomio (grado 0) es $f(a,b)$ (derivada de orden 0).
- Los de grado 1 son:
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]$$
- Las derivadas segundas de f son continuas, luego las derivadas segundas cruzadas son iguales. Los sumandos de grado 2 resultan:
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]$$
y los escribimos como cuadrado simbólico de la suma de términos de grado 1 (apdo. **2.7.3**):
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]^{(2}$$
Observamos que también los sumandos de grados $3, 4, \ldots$ pueden escribirse como las potencias simbólicas tercera, cuarta, etc. de dicha suma.
- El término complementario de orden k toma la forma:
$$T_k(x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,\xi_2)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_1,\xi_2)(y-b)\right]^{(k+1}$$
siendo (ξ_1,ξ_2) un punto intermedio entre (a,b) y (x,y), es decir:
$$(\xi_1,\xi_2) = (a,b) + \theta(x-a, y-b), \quad 0 < \theta < 1$$

Así pues, si $[\,\cdot\,]$ representa la suma de los términos de primer grado, el **desarrollo limitado de orden k de la función f** es:

$$\boxed{f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}[\,\cdot\,] + \frac{1}{2!}[\,\cdot\,]^{(2} + \frac{1}{3!}[\,\cdot\,]^{(3} + \cdots + \frac{1}{k!}[\,\cdot\,]^{(k} + T_k(x,y)}$$

Plano tangente. Análogamente a lo que sucede en una variable con la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = a$, los términos del desarrollo de grado 0 y 1 representan la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en $P(a,b)$:

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Función de n variables. La expresión del desarrollo es análoga a la de 2 variables, pero $[\,\cdot\,]$ contiene ahora las n derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots x_n$, en $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \frac{1}{1!}[\,\cdot\,] + \frac{1}{2!}[\,\cdot\,]^{(2} + \frac{1}{3!}[\,\cdot\,]^{(3} + \cdots + \frac{1}{k!}[\,\cdot\,]^{(k} + T_k(\vec{x})}$$

siendo

$$[\,\cdot\,] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2 - a_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n)$$

2.8.2. Expresión matricial.

En el caso $n = 2$, los términos de grado igual o inferior a 2, escritos en forma matricial son:

$$f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(a,b)} \begin{Bmatrix} x-a \\ y-b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(a,b)} \begin{Bmatrix} x-a \\ y-b \end{Bmatrix}$$

El segundo sumando es el producto escalar del gradiente de f por el incremento $\{(x,y)-(a,b)\}$ de la variable. El tercer sumando es la matriz hessiana pre y postmultiplicada por el incremento de (x,y). Entonces, para cualquier n, la expresión de los términos del desarrollo de grado menor o igual que 2 es:

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x}-\vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{a})^t H|_{\vec{x}=\vec{a}} \{\vec{x}-\vec{a}\} + \dots}$$

Escribimos $(\vec{x}-\vec{a})^t$ para indicar que premultiplicamos la matriz hessiana por una matriz fila, mientras que la postmultiplicamos por una matriz columna $\{\vec{x}-\vec{a}\}$.

Ejemplo. Obtenemos el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto $P(1,-2)$ de la función:

$$f(x,y) = x^2 y + 3y - 2$$

- Derivadas primeras: $f'_x = 2xy$; $f'_y = x^2 + 3$.
- Derivadas segundas: $f''_{xx} = 2y$; $f''_{yy} = 0$; $f''_{xy} = f''_{yx} = 2x$.
- Derivadas terceras: $f'''_{xxx} = 0$; $f'''_{yyy} = 0$; $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 2$; $f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy} = 0$.

Vemos que las derivadas cruzadas, tanto de segundo como de tercer orden, son iguales y que todas las derivadas de tercer orden son constantes, por lo que las de orden superior a 3 son nulas.

Particularizamos los valores de las variables en el punto P y escribimos los sumandos de grado menor o igual que 2 en forma matricial. Resulta:

$$f(P) + \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-1 & y+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{3f'''_{xxy}(x-1)^2(y+2)}{3!} =$$

$$-10 + \begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{3 \cdot 2\,(x-1)^2(y+2)}{6}$$

Operando, resulta el polinomio de grado 3 en potencias de $(x-1)$ e $(y+2)$:

$$P_3(x,y) = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

Si operamos y simplificamos, obtenemos la función inicial. Esto era de esperar pues, al ser la función un polinomio de grado 3, su polinomio de Taylor de grado 3 coincide con f.

Ejercicio. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 de la función f en $P(-1,1)$:

$$f(x,y) = xy^2 - x^2$$

Comprueba que, operando la expresión obtenida para el polinomio, resulta la función f.

Solución. $z = -2 + 3(x+1) - 2(y-1) - (x+1)^2 + 2(x+1)(y-1) - (y-1)^2 + (x+1)(y-1)^2$.

2.9. Extremos relativos

Vamos a estudiar los extremos relativos de una función de varias variables. Empezaremos suponiendo que existe un extremo y buscaremos los puntos que cumplan una cierta condición (condición necesaria de extremo). A continuación, analizando los primeros términos del desarrollo de Taylor deduciremos si en los puntos anteriores existe máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas, con lo que tendremos una condición suficiente de existencia de extremo.

2.9.1. Condición necesaria de extremo

Sea la función f:

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad f \in C^k,\ k \geq 2$$

Supongamos que f tiene un mínimo relativo en $\vec{x} = \vec{a}$, siendo $\vec{a}$ un punto interior del dominio (para un máximo razonaríamos igual). Entonces existirá un entorno reducido del punto en el que los valores de f serán mayores que $f(\vec{a})$, es decir:

$$\exists\, U^*_{\vec{a}} \,/\, f(\vec{a}) < f(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in U^*_{\vec{a}}$$

(Estamos suponiendo mínimo estricto; para mínimo en sentido amplio usaríamos $\leq$).
Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tendremos que:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^*_{\vec{a}} \subset D$$

lo que significa que f crece al modificar cualquiera de las variables x_i. Entonces, para cada una de ellas existirá un intervalo $U^*_{a_i}$ en el que se cumplirá:

$$\begin{array}{c} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = \phi_1(x_1),\ \forall x_1 \in U^*_{a_1} \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(a_1, x_2, \ldots, a_n) = \phi_2(x_2),\ \forall x_2 \in U^*_{a_2} \\ \vdots \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(a_1, a_2, \ldots, x_n) = \phi_n(x_n),\ \forall x_n \in U^*_{a_n} \end{array}$$

Es decir, tenemos n funciones de una variable, $f(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots a_n) = \phi_i(x_i)$, cada una de ellas con un mínimo en un punto interior.
El teorema del extremo relativo (para funciones de una variable) dice que *"si una función derivable en un intervalo I tiene un extremo en un punto a, interior de I, su derivada en a es nula"*. Por lo tanto,

$$\left.\frac{d\phi_1}{dx_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{d\phi_2}{dx_2}\right|_{x_2=a_2} = \cdots = \left.\frac{d\phi_n}{dx_n}\right|_{x_n=a_n} = 0$$

Pero cada una de estas derivadas equivale a la derivada parcial de f respecto a la variable correspondiente, particularizada en $\vec{x} = \vec{a}$, luego:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \cdots = \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}}$$

que es una **condición necesaria para la existencia de extremo** en el punto $\vec{a}$. Los puntos que verifican esta condición se llaman **puntos críticos**.
Como hemos supuesto que f es diferenciable y $\vec{a}$ un punto interior, hemos de comprobar también los **puntos frontera y aquellos en que f no es diferenciable**, donde podría haber extremo (en el documento de apoyo **6.6** puede verse un caso en que se estudia la frontera).

2.9.2. Condición suficiente de extremo

Para determinar el tipo de extremo, utilizaremos los tres primeros términos del desarrollo de Taylor. Al ser continuas las derivadas segundas, la matriz hessiana H es simétrica.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x} - \vec{a})^t H|_{\vec{x}=\vec{a}} (\vec{x} - \vec{a}) + \dots$$

Si llamamos $d\vec{x}$ al incremento $\vec{x} - \vec{a}$ y pasamos al otro miembro el $f(\vec{a})$, tenemos:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot d\vec{x} + \frac{1}{2}\, d\vec{x}^{\,t} H|_{\vec{x}=\vec{a}}\, d\vec{x} + \dots$$

En la expresión anterior, observamos lo siguiente:

- El primer miembro representa el incremento del valor de la función entre $\vec{a}$ y $\vec{x}$.
- El primer sumando del segundo miembro es la diferencial $df(\vec{a})$ de la función.
- El segundo sumando es la diferencial segunda $d^2 f(\vec{a})$, multiplicada por $1/2$.
- Los siguientes sumandos son infinitésimos de orden superior: si $\vec{x}$ está muy cerca de $\vec{a}$, son despreciables frente a los anteriores.

Si el punto $\vec{a}$ cumple la condición necesaria de extremo, $\vec{\nabla} f(\vec{a})$ es nulo, por lo que el signo de Δf lo da el primer sumando no nulo, $d^2 f(\vec{a})$ (no da el valor exacto debido a los infinitésimos de orden superior). A continuación analizamos este término.
La diferencial segunda es una forma cuadrática, que asocia un número real a un vector:

$$d\vec{x} \to d\vec{x}^{\,t}\, H\, d\vec{x}$$

Clasificamos una forma cuadrática según el signo que tome $\forall\, d\vec{x} \neq 0$. Así, $d^2 f$ será:

- Definida positiva $\iff d^2 f > 0$.
- Definida negativa $\iff d^2 f < 0$.
- Semidefinida positiva $\iff d^2 f \geq 0$.
- Semidefinida negativa $\iff d^2 f \leq 0$.
- Indefinida $\iff d^2 f \gtrless 0$ (puede ser nula, aunque no es necesario).

Entonces, según el tipo de forma cuadrática que sea $d^2 f$, tendremos:

- Si $d^2 f$ es definida positiva, $\Delta f > 0$ siempre, luego se trata de un mínimo.
- Si $d^2 f$ es definida negativa, $\Delta f < 0$ siempre, luego se trata de un máximo.
- Si $d^2 f$ es indefinida, puede darse $\Delta f \gtrless 0$, luego no hay ni máximo ni mínimo.

Si es semidefinida, tenemos un **caso dudoso**. Lo analizamos para semidefinida positiva:

- En este caso, $d^2 f \geq 0$. Entonces, para algún $d\vec{x}$, $\Delta f > 0$; para otros, $d^2 f = 0$ y el signo de Δf lo dan los términos de orden superior, con lo que Δf puede ser $\gtreqless 0$.
- Lo único que podemos asegurar es que no existe máximo. En efecto, para algún $d\vec{x}$, debe ser $d^2 f > 0$, por lo que $\Delta f > 0$ y la función crece. Luego no puede haber máximo. (Razonando análogamente, si $d^2 f$ es SDN, no puede existir mínimo).

En el documento de apoyo **6.7** se analiza la función $f(x, y) = x^2 + ky^4$, que tiene un punto crítico en $(0, 0)$, donde su $d^2 f$ es SDP. Según el signo de k, se obtienen distintos resultados.

2.9.3. Determinación del tipo de forma cuadrática

Veremos dos formas de clasificar una forma cuadrática, a partir de su matriz asociada.

Criterio de Sylvester. Una forma cuadrática es:

- Definida positiva si y sólo si los menores principales de la matriz son positivos.
- Definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales son $-, +, - + \ldots$

Diagonalización por congruencia. Toda matriz simétrica es diagonalizable por congruencia, es decir:

$$H = H^t \Longrightarrow \exists\, C \left(|C| \neq 0 \right) / \, CHC^t = D$$

Según los signos de los elementos de la diagonal principal de D, la forma cuadrática será:

- Definida positiva $\iff d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Definida negativa $\iff d_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Semidefinida positiva $\iff d_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Semidefinida negativa $\iff d_i \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Indefinida $\iff d_i \gtrless 0$ (puede haber alguno nulo).

Nota. A partir de dos propiedades de las matrices cuadradas (*"el determinante del producto es igual al producto de los determinantes"* y *"el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta"*), se cumple:

$$|D| = |C|\,|H|\,\left|C^t\right| = |C|^2\,|H|$$

Como $|C| \neq 0$, será $|C|^2 > 0$, luego los determinantes de la matriz hessiana y su matriz diagonal tienen el mismo signo. Esto nos permite utilizar el signo de $|H|$ al clasificar la forma cuadrática.

A continuación se muestran los pasos que conviene dar en el estudio de extremos.

2.9.4. Cálculo de extremos. Resumen y ejemplos

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$. Para buscar sus extremos en $\mathring{D}$, interior del dominio, tenemos en cuenta las condiciones necesaria y suficiente.

Condición necesaria. Al ser el conjunto abierto y f diferenciable, sus extremos están en puntos que cumplan la condición de gradiente nulo. Entonces los posibles extremos (puntos críticos) vienen dados por las soluciones de la ecuación:

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \vec{0}}$$

Condición suficiente. Para saber qué puntos críticos son extremos, el primer paso es determinar de qué tipo es la forma cuadrática $d^2 f$ en ellos. Sabemos que:

- Si es definida, se trata de un mínimo (positiva) o de un máximo (negativa).
- Si es indefinida, no hay máximo ni mínimo (punto de silla).
- Si es semidefinida, solo sabemos que no puede haber máximo (si es SD positiva) o no puede haber mínimo (si es SD negativa).

Así pues, procedemos del siguiente modo:

a) **¿Es H definida?** Se averigua aplicando el **criterio de Sylvester**. Entonces si es definida positiva, existe un **mínimo**. Si es definida negativa, un **máximo**.

b) Si H **no** es **definida**, estudiando su determinante tenemos dos casos:

b.1 $\boxed{|H| \neq 0}$. Como $|D| = |C|^2 |H|$, resulta que $|D| = d_1 d_2 \cdots \neq 0$, lo que significa que ningún d_i es nulo, con lo que tendrán signos iguales o distintos. Si tuvieran igual signo, H sería definida, cosa que no ocurre. Entonces han de existir $d_i \gtrless 0$, por lo que H es **indefinida** y tenemos un **punto de silla**.

b.2. $\boxed{|H| = 0}$. Entonces $|D| = 0$ por lo que los d_i pueden ser $\geq 0, \leq 0$ ó $\lneqq 0$ (alguno ha de ser nulo), por lo que H puede ser **semidefinida** o **indefinida**.

En estos casos se puede conocer el tipo diagonalizando por congruencia.

En el caso particular $n = 2$, sólo existen dos d_i, de los que al menos uno es nulo. No puede entonces ser indefinida, por lo que será semidefinida.

c) **Casos dudosos** (H semidefinida): para solucionarlos podemos probar distintas direcciones de alejamiento desde el punto $\vec{a}$. Si en una dirección la función crece pero en otra decrece, se trata de un **punto de silla**. Lo mismo ocurre si, en la misma dirección, crece en un sentido y decrece en el otro. En el caso $n = 2$, podemos movernos desde (a, b) paralelamente a los ejes, a las bisectrices $y = x,\ y = -x$, etc.

Ejemplos.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - 2y$.

Aplicando la condición necesaria, resulta el punto crítico $P(0, 1)$. La matriz hessiana es $H_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, definida positiva (Sylvester), luego se trata de un mínimo.

b) $f(x, y) = xy + x - y - 1$.

Aplicando la condición necesaria, resulta el punto crítico $P(1, -1)$. La matriz hessiana es $H_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En este caso H no es definida (Sylvester). Como $|H| \neq 0$, resulta que H es indefinida, por lo que tenemos un punto de silla.

c) $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(0, y)$ (son críticos todos los puntos del eje Y). En todos ellos, $H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H| = 0 \Longrightarrow H$ semidefinida $(n = 2) \Longrightarrow$ caso dudoso.

Para solucionarlo consideramos la diferencial segunda $d^2 f = -\dfrac{1}{R}\, dx^2 \leq 0$, que toma valor negativo $\forall\, dx \neq 0$. Luego el valor de f disminuye si nos movemos, desde los puntos $(0, y)$ en cualquier dirección, salvo la dada por $dx = 0$. Pero esto significa movernos por el eje Y, donde el valor de la función es constante y vale R. Es decir, en todo punto $(0, y)$ –eje Y– existe un máximo en sentido amplio, de valor $z = R$.

Lo vemos gráficamente escribiendo la ecuación en la forma $z^2 + x^2 = R^2$, que corresponde a un cilindro de radio R y eje horizontal (el eje OY). La expresión del enunciado corresponde a la parte del cilindro sobre el plano XY $(z \geq 0)$.

d) $f(x, y) = y^3 - x^2 - 2x - 1$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(-1, 0)$. $H_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz H, diagonal, es semidefinida negativa (caso dudoso).

Para resolverlo estudiamos –como en **c)**– la diferencial segunda $d^2f = -2dx^2$. Esto nos indica que el valor de f disminuye al movernos en cualquier dirección, salvo la del eje Y ($dx = 0$). Estudiando este caso (variación sólo de y), comprobamos que f crece si y crece y decrece si y decrece, por lo que en P hay un punto de silla.

Otra opción es movernos en distintas direcciones a partir de $P(-1, 0)$, donde f es nula: por ejemplo en las de los ejes, incrementando alternativamente x e y en un valor Δ. Resulta:

d.1. En cualquier punto de coordenadas $(-1 + \Delta, 0)$, la función toma el valor $-\Delta^2$, luego decrece, a partir de su valor en P, independientemente del signo de Δ.

d.2. En cualquier punto de coordenadas $(-1, \Delta)$, la función vale Δ^3. Es decir, crece si nos movemos desde P en el sentido positivo del eje Y ($\Delta > 0$) y decrece en caso contrario.

Concluimos que, en $P(-1, 0)$, f no tiene máximo ni mínimo (punto de silla).

e) $f(x, y, z) = 3x^2 - 6x + y^4 - z^4$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(1, 0, 0)$. $H_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

H es semidefinida positiva (caso dudoso) y la diferencial segunda vale $d^2f = 6dx^2$, por lo que la función crecerá siempre que $dx \neq 0$. Si en cambio nos movemos a partir de P, paralelamente al plano YZ ($dx = 0$), la diferencial segunda vale 0. Para identificar el tipo de extremo, nos movemos paralelamente a dicho plano a partir de P, modificando el valor de una de las variables y, z cada vez:

e.1. Valor de f en P: $f(1, 0, 0) = -3$.

e.2. Incrementamos y: $f(1, \Delta, 0) = -3 + \Delta^4 \Longrightarrow \Delta f = \Delta^4$, luego f crece.

e.3. Incrementamos z: $f(1, 0, \Delta) = -3 - \Delta^4 \Longrightarrow \Delta f = -\Delta^4$, luego f decrece.

Se trata, entonces, de un punto de silla. No hemos probado a modificar el valor de la x, pues, como se ha dicho, la función crecerá siempre que $dx \neq 0$ (compruébese).

2.10. Función implícita

A partir de una ecuación que relacione dos variables, $F(x, y) = 0$, en ocasiones podemos despejar una de ellas en función de la otra. Por ejemplo:

$$x^3y - \operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3},\ \forall x \neq 0$$

En otros casos no es posible obtener una expresión explícita de y en función de x. Por ejemplo:

$$x \operatorname{sen} y - y - x^2 = 0 \Longrightarrow\ ?$$

Sin embargo, puede ocurrir que, para cada x, haya un único y que verifique la ecuación. Eso implicaría que y es función de x, aunque no exista una expresión explícita que las relacione. En este caso decimos que y es función implícita de x.
A continuación daremos una definición de función implícita y enunciaremos el teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables. Luego analizaremos el caso general.

2.10.1. Definición

Decimos que $F(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si y sólo si, para todo $x \in I$, existe un único valor $\psi(x)$ que verifica la ecuación, es decir:

$$\boxed{\forall x \in I\ \exists\, \psi(x) \in \mathbb{R} \,/\, F\big(x, \psi(x)\big) = 0}$$

2.10.2. Teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables

Lo enunciamos en dos partes:

a) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, abierto. Sea $F(x,y)$ una función continua en A, tal que su derivada respecto de y también lo es. Sea $P(a,b) \in A$ un punto en el que se anula la función y no la derivada.

$$F(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ continuas en } A; \quad \exists (a,b) \,/\, F(a,b) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

En este caso la ecuación $F(x,y) = 0$ define como función implícita de x a una **única** función continua $y = \psi(x)$, en un entorno de $x = a, y = b$ (U_a).

b) Si, además, la derivada de F respecto de x es continua en A, entonces $y = \psi(x)$ es diferenciable en U_a y -aplicando la regla de la cadena- se cumple:

$$F\big(x,\psi(x)\big) = \phi(x) = 0 \Longrightarrow \frac{d\phi}{dx} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{y=\psi(x)} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{d\psi}{dx}\right|_{y=\psi(x)} = 0 \tag{2.3}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{d\psi}{dx} = -\left.\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\right|_{y=\psi(x)}}$$

Es decir, aunque no exista la expresión explícita de $y = \psi(x)$, podemos conocer su derivada en un cierto U_a, y en particular en $x = a$. Esto permite, por ejemplo, obtener la tangente a la curva definida por $F(x,y) = 0$, sin conocer la ecuación $y = \psi(x)$ de dicha curva.

Ejemplo. Sea $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Sus derivadas parciales son $F'_x = 2x, F'_y = 2y$. Haciendo $y = x$ en la ecuación, obtenemos el punto $P\,(1,1)$ en el que se anula F y no F'_y. Entonces existe un entorno de $x = 1$, $y = 1$, donde se cumple:

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y} \quad \left(\text{en particular } \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_P = -1\right)$$

Obsérvese que $F(x,y) = 0$ es la ecuación de una circunferencia, de la que obtenemos dos posibles funciones $y = \psi(x)$, correspondientes a las semicircunferencias por encima y por debajo de OX. Vemos también que todos los puntos de la circunferencia valen como punto P, excepto $P_1(\sqrt{2},0)$ y $P_2(-\sqrt{2},0)$, en los que $F'_y = 0$. El motivo es que en todo entorno de esos puntos existen **dos** funciones implícitas (las semicircunferencias mencionadas), por lo que en ellos no se cumple el teorema, que garantiza la existencia de una única función implícita en un cierto entorno.

Nota. La derivada de ϕ en la ecuación (2.3) es nula porque la función $\phi(x)$ es **constante** $(\phi = k = 0)$ en un cierto entorno de $x = a$. En el ejemplo anterior, la función $z = F(x,y)$ representa un paraboloide. La condición $F = 0$ es la ecuación de la curva intersección del paraboloide con XY, es decir, un conjunto de puntos $(x,\psi(x))$ en los que $F = 0$. Por tanto, en el entorno U_a considerado, la variación de $F\big(x,\psi(x)\big) = \phi(x)$ respecto a x es nula.

Ejercicio 1. Dada la ecuación $F(x,y) = y^2\cos x - x^2\cos y = 0$, se pide:

a) Comprobar que existe f. implícita en un entorno de $P(\pi/2,\pi/2)$ y hallar $\partial\psi/\partial x$ en P.

b) Identificar la función, que en este caso tiene una forma explícita muy sencilla.

c) En $Q(0,0)$ no se cumple $F'_y \neq 0$. ¿Por qué?

Ejercicio 2. Aplica el teorema a $F(x,y) = \operatorname{sen} y + \sec y - x = 0$, hallando el punto $P(a,b)$.

2.10.3. Generalización del teorema a funciones vectoriales

Acabamos de estudiar una ecuación con dos variables que define a una de ellas como función implícita de la otra, $y = \psi(x)$. Vamos a enunciar el teorema en el caso general: ecuación con $m+n$ variables que define a m de ellas como función (vectorial) implícita de las n variables restantes (variable vectorial). Antes veremos, como introducción, un caso con 3 variables.

Caso particular. Sea la ecuación $g(u,v,y) = 0$. Análogamente a lo definido en **2.10.1** -y prescindiendo de dominios de existencia para simplificar- podemos decir que $g(u,v,y) = 0$ define a y como función implícita de u, v si y sólo si

$$\forall (u,v)\, \exists \psi(u,v) \,/\, g\big(u,v,\psi(u,v)\big) = \phi(u,v) = 0$$

Si se cumplen las condiciones suficientes para ello, $\psi(u,v)$ será diferenciable y -calculando las derivadas parciales de ϕ y despejando- resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial u} = -\frac{\partial g/\partial u}{\partial g/\partial y}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial v} = -\frac{\partial g/\partial v}{\partial g/\partial y}}$$

siempre que la derivada parcial de g respecto de y no se anule.

Caso general. Consideramos ahora una función de m componentes $(g_1, g_2, \dots g_m)$ y $m+n$ variables $(x_1, \dots x_n, y_1 \dots y_m)$, que podemos expresar abreviadamente como $\vec{g}(\vec{x},\vec{y})$.
Las condiciones que exigimos a $\vec{g}$ son análogas a las exigidas en el caso de la función de dos variables $F(x,y)$:

- $\vec{g}$ continua, es decir componentes g_k continuas en $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $k = 1, \dots m$.
- Derivadas parciales $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}$ continuas en $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $i = 1, \dots n$; $j,k = 1, \dots m$.
- Existe un punto $(a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_m) = (\vec{a},\vec{b}) \,/\, \vec{g}(\vec{a},\vec{b}) = \vec{0}$, $\left|\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}\right|_{(\vec{a},\vec{b})} \neq 0$.

Teorema: en las condiciones enunciadas, "*la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$ define como función implícita de $\vec{x}$ a una única función $\vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$, en un entorno de $\vec{x} = \vec{a}$, $\vec{y} = \vec{b}$ $(U_{\vec{a}})$, diferenciable en $U_{\vec{a}}$*".
Esto significa que:

a) La función implícita $\vec{\psi}$ verifica la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \exists\, \vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x}) \,/\, \vec{g}\left(\vec{x}, \vec{\psi}(\vec{x})\right) = \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}}$$

La expresión anterior, desarrollada, significa que existen m funciones $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, todas ellas de n variables $(x_1, \dots x_n)$, tales que satisfacen las m ecuaciones $g_i = 0$. Esto da lugar a m funciones ϕ_i, de las mismas n variables cada una, que se anulan en $U_{\vec{a}}$. Es decir:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots x_n, \psi_1, \dots, \psi_m) &= \phi_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots x_n, \psi_1, \dots, \psi_m) &= \phi_2(x_1, \dots x_n) = 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots x_n, \psi_1, \dots, \psi_m) &= \phi_m(x_1, \dots x_n) = 0 \end{aligned}$$

b) Para calcular las derivadas de las funciones ϕ_k respecto las distintas variables usamos la regla de la cadena. La derivada de ϕ_k respecto a x_i será:

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = 0$$

Tomando k como índice de fila e i de columna, vemos que $\partial \phi_k/\partial x_i$ representa el elemento (k,i) de la matriz de las derivadas parciales de $\vec{\phi}$ respecto a $\vec{x}$. De la misma forma, $\partial g_k/\partial x_i$ representa el elemento (k,i) de la matriz de las derivadas parciales de $\vec{g}$ respecto a $\vec{x}$.

Por otro lado, la suma entre 1 y m del segundo miembro representa el producto de la fila k de la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$, por la columna i de la matriz de las derivadas de $\vec{\psi}$ respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir la expresión en forma matricial y despejar. Obtenemos:

$$\boxed{\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = \Omega_{m\times n}} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = -\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1}\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}\bigg|_{\vec{y}=\vec{\psi}(\vec{x})}}$$

lo que nos permite calcular la matriz de las derivadas de la función implícita $\vec{\psi}$ respecto a la variable $\vec{x}$. En estas expresiones, todas las matrices son de dimensión $m \times n$, excepto la derivada de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$, que es cuadrada $(m \times m)$.

Como regla mnemotécnica, obsérvese que la expresión vectorial resultante corresponde exactamente con la que obtuvimos en 2 variables, usando vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{\psi}$ en lugar de escalares y cambiando la F por $\vec{g}$.

Ejemplo. Vamos a aplicar las expresiones que hemos obtenido al caso particular que resolvimos como introducción.

Expresamos la ecuación $g(u,v,y) = 0$, como $\vec{g}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$, siendo:

$$\vec{x} = (u,v); \quad \vec{y} = y; \quad \vec{g} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m,\ n = 2,\ m = 1 \ \ (\Rightarrow g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$$

La condición $\vec{g} = \vec{0}$ define la función implícita $\vec{\psi}$:

$$\vec{g}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$$

donde $\vec{g}, \vec{y}, \vec{\psi}$ son escalares en este caso.

Aplicando la expresión general a nuestro caso, la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$ tiene un único elemento y su inversa es $(\partial g/\partial y)^{-1}$. Y la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{x}$ contiene las derivadas de g respecto de u y v. Entonces la derivada de la función implícita $\vec{\psi}$ respecto de $\vec{x}$ es:

$$\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\partial g/\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = -\left(\frac{\partial g/\partial u}{\partial g/\partial y}, \frac{\partial g/\partial v}{\partial g/\partial y}\right)$$

Observamos que las expresiones que hemos obtenido de las derivadas de ψ respecto de u y v coinciden con las calculadas al principio.

Lo anterior sugiere que con frecuencia la notación vectorial no es necesaria y se puede proceder como hicimos en el caso particular.

Se recomienda ver los problemas resueltos en el documento de apoyo **6.8**.

2.11. Extremos condicionados

En el apartado **2.9** hemos hallado extremos de funciones vectoriales cuyas variables pueden moverse libremente por sus respectivos dominios. A continuación estudiaremos extremos de funciones en el caso de que existan **condiciones de ligadura** entre las distintas variables.

Imaginemos una función de dos variables con un extremo en el punto $P(a,b)$. Si le imponemos una condición que relacione x e y, puede dejar de haber extremo en P y aparecer otro en P'.

Ejemplo. La función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ alcanza su valor máximo para $x = y = 0$. Si las variables deben cumplir la condición $x + y - 1 = 0$, el máximo se alcanza para $x = y = 1/2$.

2.11.1. Condiciones en forma explícita

Consideramos una función de $m+n$ variables, ligada por m condiciones explícitas tales que m variables dependen explícitamente de las otras n. Es decir, sea la función:

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m)$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= \psi_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Haciendo $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1 \ldots, y_m)$, la función se expresa abreviadamente como:

$$f(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{con} \quad \vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$$

Resulta inmediato que, sustituyendo en f las variables y_i por sus respectivas expresiones $\psi_i(\vec{x})$, resulta una nueva función, de sólo n variables,

$$f(\vec{x}, \vec{y})|_{\vec{y}=\vec{\psi}(\vec{x})} = f(\vec{x}, \vec{\psi}(\vec{x})) = \phi(\vec{x})$$

de la que podemos calcular los extremos por el método descrito en **2.9**. Este sería el caso del ejemplo anterior, si hacemos $y = 1 - x$ en $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, obteniendo $\phi(x) = 2x - 2x^2$.

2.11.2. Condiciones en forma implícita

Se trata ahora de obtener los extremos de la función anterior $f(\vec{x}, \vec{y})$, pero con las m condiciones dadas en forma implícita:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

lo que podemos escribir abreviadamente como $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$.

Método de los multiplicadores de Lagrange. Se demuestra que existen ciertos valores $\lambda_i \in \mathbb{R}$, tales que los extremos de la función f, con las m ligaduras entre sus variables, coinciden con los de la función siguiente, que llamamos lagrangiana:

$$L = f(\vec{x}, \vec{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\vec{x}, \vec{y})$$

Esto permite simplificar el cálculo de los extremos cuando las condiciones no son explícitas.

Justificación de la condición necesaria. Lo haremos para una función de tres variables sujeta a dos condiciones (es decir, $n = 1$, $m = 2$). Veremos que los puntos críticos de f con sus ligaduras $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, cumplen las mismas condiciones que los de la lagrangiana L. Sean:

$$u = f(x, y, z); \quad g_1(x, y, z) = 0; \quad g_2(x, y, z) = 0$$

La función lagrangiana es:

$$L = f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2\, g_2(x, y, z)$$

Para obtener los puntos críticos de L se deben cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por el teorema de la función implícita sabemos que, en ciertas condiciones, las ecuaciones $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ definen dos funciones ψ_1, ψ_2 que las satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \psi_1(x), \psi_2(x) \,/\, \left\{\begin{array}{l} g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = 0 \\ g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo y y z por ψ_1, ψ_2 respectivamente, en la función f, ésta se convierte en una función de x:

$$f\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi(x)$$

que derivaremos respecto a su variable, para hallar sus posibles extremos.

Sustituimos también en las condiciones. Teniendo en cuenta que las funciones $g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big)$ y $g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big)$ son nulas (por tanto, constantes) para todo x de un cierto conjunto, sus derivadas respecto a x también lo serán.

Derivamos entonces f, g_1 y g_2 usando la regla de la cadena, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

En estas tres ecuaciones hay sólo dos incógnitas, las derivadas de ψ_1 y ψ_2. Para que exista solución, una de las ecuaciones ha de ser combinación lineal de las otras. Es decir, deben existir $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El coeficiente α ha de ser distinto de 0. De lo contrario las derivadas de g_1 y g_2 serían proporcionales y no se cumpliría la condición de determinante de $\partial\vec{g}/\partial\vec{y}$ no nulo (apdo. **2.10.3**). Entonces, dividiendo entre α y haciendo $\beta/\alpha = \lambda_1, \gamma/\alpha = \lambda_2$, resulta:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando las componentes en ambos miembros, obtenemos la misma condición necesaria de extremo que teníamos para la función lagrangiana (2.4).

Aplicación práctica del método. Sea una función $f(x_1, \ldots, y_m)$, con m ligaduras:

$$g_1(x_1, \ldots, y_m) = 0\,,\ g_2(x_1, \ldots, y_m) = 0\,,\ \ldots\ g_m(x_1, \ldots, y_m) = 0$$

La función lagrangiana es: $L = f + \lambda_1\, g_1 + \cdots + \lambda_m\, g_m$.

Puntos críticos. Para hallarlos, aplicamos la **condición necesaria** de extremo derivando L respecto a las $m + n$ variables. Añadimos las m condiciones de ligadura:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0}\,; \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0}\,; \quad \boxed{g_1 = 0, \ldots, g_m = 0}$$

Tenemos así $2m + n$ ecuaciones. Las $2m + n$ incógnitas son los puntos $P(a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots b_m)$ y los valores de los multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Condición suficiente. En los puntos críticos habrá máximo, mínimo o punto de silla (ni máximo ni mínimo) según el tipo de forma cuadrática de $d^2L|_{dg_i=0}$.

La condición $dg_i = 0$ significa que, al estudiar la d^2L, hay que tener en cuenta las relaciones entre las diferenciales de las variables debidas a las condiciones $g_i = 0$ en forma diferencial. Pues ahora las diferenciales (incrementos) de las variables están relacionados por las ecuaciones $dg_i = 0$, lo que influye en el tipo de forma cuadrática de d^2L. Entonces:

$$\boxed{\text{Si } d^2L|_{dg_i=0} \text{ es } \begin{cases} \text{definida positiva} & \Longrightarrow \text{ mínimo} \\ \text{definida negativa} & \Longrightarrow \text{ máximo} \\ \text{indefinida} & \Longrightarrow \text{ p. de silla} \end{cases}}$$

Nota. Si la d^2L es definida, no es necesario estudiar las condiciones $dg_i = 0$, pues no van a cambiar el tipo de forma cuadrática. En cambio, cuando la d^2L es semidefinida o indefinida, las relaciones entre las diferenciales de las variables pueden influir en el resultado final.

Ejemplo. Aplicamos el método al ejemplo utilizado en la introducción, en el que

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad g(x, y) = x + y - 1 = 0$$

La función lagrangiana es $L = 1 - x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1)$. Derivando,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + \lambda = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda = 0 \Longrightarrow x = y$$

Introduciendo $x = y$ en la condición $x + y - 1 = 0$, resulta el punto $P'(1/2, 1/2)$.
Las derivadas segundas son:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0 \Longrightarrow H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

H es una matriz diagonal, por lo que resulta inmediato ver que es definida negativa (aplicando el criterio de Sylvester se observa lo mismo, pues los menores principales son $-2, +4$). Como consecuencia, en el punto $P'(1/2, 1/2)$ tenemos un máximo.

Puede verse un ejemplo resuelto con dos condiciones de ligadura en **6.9**.

Ejercicio. Comprueba por este método que el rectángulo de perímetro dado P y área máxima es el cuadrado de lado $l = P/4$.

2.12. Ejercicios de autoevaluación

2.12.1. Test verdadero/falso

Test 1 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Las propiedades de la aplicación"norma euclídea" son: positividad, conmutatividad y desigualdad triangular.

2. Una función vectorial de variable real es continua en $x = a$, si y sólo si cada una de sus componentes es continua en $x = a$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si los límites de f en $\vec{a}$, según las direcciones dadas por $\vec{\omega}$, valen φ, entonces f tiene límite φ en $\vec{a}$.

4. Si existen las derivadas direccionales de una función real de dos variables la función será continua.

5. Las derivadas direccionales de una función f de varias variables dependen siempre de la dirección.

6. Una condición necesaria de diferenciabilidad de una función real de varias variables es que las derivadas parciales sean continuas.

7. El jacobiano de una función vectorial de 3 componentes y 2 variables es una matriz de $3^2 = 9$ elementos.

8. Sean $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Sean $D_f = \mathbb{R}^n$ y $D_g = \mathbb{R}^m$. Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son diferenciables en su dominio, entonces $\vec{f} \circ \vec{g}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

9. Sea una función vectorial de variable vectorial. Si se cumple el teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas, el jacobiano de la función es una matriz simétrica.

10. Sea $u = f(x, y, z),\ f \in C^2$. Se cumple $d^2u = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz\right)^{(2}$. Si desarrollamos esta expresión, el coeficiente numérico del término que contiene a $dxdz$ es 2.

Test 2 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

a) Sea una función $f(x, y),\ f \in C^2$, en todo su dominio. Podemos afirmar que:

1. Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (a, b) es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ por el punto $(a, b, f(a, b))$.

2. Si la función $f(x, y) = x^2y^2$, sus derivadas de orden cinco y superior son nulas, por lo que su polinomio de Taylor de cuarto grado en torno al punto $P(1, 1)$ representa exactamente a la función.

b) Estudiamos ahora los extremos relativos de la función $f(x, y),\ f \in C^2$ en puntos en los que sus derivadas parciales son nulas. Podemos afirmar que:

3. La función sólo tendrá extremos si d^2f es definida (positiva o negativa).

4. Si d^2f no es definida y $|H| \neq 0$, se trata de un punto de silla.

5. Si el determinante hessiano es nulo, la diferencial segunda sólo puede ser semidefinida, a pesar de lo cual puede existir un extremo.

6. Si en los puntos críticos la d^2f resulta ser indefinida, podemos asegurar que la función no tiene extremos.

7. Si la matriz H es semidefinida se trata de un caso dudoso. Pero se puede afirmar que, si es semidefinida positiva, no hay máximo y, si es semidefinida negativa, no hay mínimo.

c) Sea la ecuación $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y = 0$. Sean los puntos $P(0,0)$ y $Q(-1,-1)$.

8. En P se cumplen las condiciones de existencia y diferenciabilidad de la función implícita.

9. En Q se cumplen las condiciones de existencia y diferenciabilidad de la función implícita.

10. En P, la derivada de la función implícita es nula.

d) Buscamos los extremos de $f(x,y,z)$, con las ligaduras $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

11. Los extremos coinciden con los de la función $L = f + \lambda g_1 + \mu g_2,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

12. Las ecuaciones $g_1 = 0,\ g_2 = 0$ sólo influyen para la obtención de los puntos críticos, no para el estudio del tipo de extremo (condición suficiente).

13. Una vez obtenidos los puntos críticos, tendremos un máximo si $d^2L|_{dg_i=0,\ i=1,2}$ toma valores negativos $\forall (dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$.

14. En el cálculo de extremos condicionados, el tipo de extremo viene dado por el signo de $d^2L|_{dg_i=0}$. Pero, si la matriz H es definida, no es preciso utilizar las condiciones $dg_i = 0$.

2.12.2. Cuestiones

Cuestión 1. Sea f una función real definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Se pide definir el límite direccional y la derivada direccional de f en un punto $\vec{a}$ y razonar la verdad o falsedad de las frases siguientes:

a) Si el límite direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, no existe límite funcional en $\vec{a}$.

b) Si f es diferenciable en $\vec{a}$, la derivada direccional en $\vec{a}$ no depende de la dirección.

Cuestión 2. Sea f una función real definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Se pide enunciar la condición necesaria y la suficiente de diferenciabilidad y razonar la verdad o falsedad de las frases:

a) Si f cumple en D la condición suficiente, entonces cumple la necesaria.

b) Si f cumple en D la condición necesaria, entonces cumple la suficiente.

Cuestión 3. Sea la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para obtener sus derivadas direccionales en el origen, calculamos el límite:

$$D_{\vec{\omega}}\vec{f}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) - f(0,0)}{\lambda} = \cdots = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega_x \omega_y}{\lambda}$$

que no tiene valor finito. Sin embargo, calculando las derivadas parciales en el origen por la definición, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f((0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cdots = 0$$

Como las derivadas parciales (que existen) son un caso particular de las direccionales (que parecen no existir), explíquese la razón de esta aparente contradicción.

Cuestión 4. Razónese la verdad o falsedad de la afirmación siguiente: "Sea f una función real de 2 variables, diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Su gradiente en el punto $P(a,b)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ que indica la dirección de mínima variación de f, a partir de su valor en P".

Cuestión 5. Enuncia el teorema de existencia y diferenciabilidad de la función implícita.

Cuestión 6. Sea $F(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y - y\,\mathrm{sen}\,x = 0$. Puede comprobarse que se cumplen las condiciones para que la ecuación $F(x,y) = 0$ defina una función implícita en un entorno del punto $P(\pi/2, \pi/2)$ (que no es otra que $y = x$). Por otro lado, vemos que también es solución de la ecuación la función $y = 0$, recta que corta a $y = x$ en el (0,0).
Lo anterior parece significar que, en todo entorno del (0,0), existen dos funciones implícitas ($y = x$ e $y = 0$). Pero el teorema afirma que, en ciertas condiciones, la función implícita definida por $F(x,y) = 0$ es única en un cierto entorno de $P(a,b)$. ¿No se cumple entonces el teorema?

2.12.3. Solución de los test verdadero/falso

Test 1.

1. **F**. Las 3 propiedades son: positividad, producto por un escalar y desigualdad triangular.
2. **V**. Véase apdo. **2.3.2.**
3. **F**. Que existan límites según las infinitas direcciones rectas que parten del punto, y coincidan, no significa que tenga que existir límite al aproximarnos al punto según cualquier curva. Existe un ejemplo de este caso en los documentos de apoyo del tema).
4. **F**. La existencia de derivadas direccionales no asegura la diferenciabilidad, por lo que tampoco asegura la continuidad. Si f admite derivada en una dirección, el límite de f en $\vec{a}$ coincidirá con $f(\vec{a})$ sólo en esa dirección.
5. **F**. No siempre. Por ejemplo, si una función diferenciable tiene un extremo en un punto interior del dominio, las derivadas direccionales en ese punto, según cualquier dirección, serán nulas.
6. **F**. No es condición necesaria, sino suficiente de diferenciabilidad.
7. **F**. El jacobiano de una función vectorial de 3 componentes y 2 variables es una matriz de $3 \times 2 = 6$ elementos.
8. **F**. Hemos definido la función compuesta diciendo que $(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}\,(\vec{g}(\vec{x}))$. Con esta definición, $\vec{f} \circ \vec{g}$ no tiene por qué ser diferenciable, pues puede ni siquiera existir. En efecto, si $p \neq n$, los elementos $\vec{g}(\vec{x})$ no serán variables de la función $\vec{f}$. En cambio $\vec{g} \circ \vec{f}$ existe y es diferenciable (ver apdo. **2.6.2**).
9. **F**. El jacobiano de una función vectorial, de m componentes y n variables, es la matriz $m \times n$ de las derivadas parciales y ni siquiera tiene por qué ser cuadrada. Quien es simétrica, si se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Schwarz, es la matriz cuadrada de las derivadas segundas (matriz hessiana o hessiano).
10. **V**. El desarrollo del cuadrado **simbólico** de una suma contiene la suma de "cuadrados" más la de "dobles productos". Uno de estos últimos es el que se pide, $2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,dxdz$.

Test 2.

a) Sea una función $f(x,y),\ f \in C^2$, en todo su dominio. Podemos afirmar que:

1. **F**. La ecuación del plano tangente viene dada por el polinomio de Taylor de grado 1 (apdo. **2.8.1**).

2. **V**. De las 16 derivadas de cuarto orden sólo serán distintas de cero las 6 en las que se deriva 2 veces respecto de x y 2 respecto de y (todas valdrán 4). Por tanto las derivadas de orden mayor que 4 serán nulas. El resultado es un polinomio de grado 4, en potencias de $(x-1)$ e $(y-1)$. Si operamos y simplificamos obtendremos la expresión de la función.

b) Estudiamos ahora los extremos relativos de la función $f(x,y),\ f \in C^2$ en puntos en los que sus derivadas parciales son nulas. Podemos afirmar que:

3. **F**. Puede haber extremos con d^2f semidefinida. Ejemplo: $f(x,y) = x^2 + y^4$ en el punto $P(0,0)$ (véase apdo. **2.9.2** y el documento de apoyo **6.7**).

4. **V**. Si $|H| \neq 0$, ningún elementos de la matriz diagonal es nulo. Como no pueden ser ambos positivos (la f. cuadrática sería definida positiva), ni negativos (sería definida negativa), deben ser de distinto signo, por lo que es indefinida y se tratará de un punto de silla.

5. **V**. Si $|H| = 0$, algún elemento diagonal es nulo. Como hay dos, no pueden ser de distinto signo, luego es semidefinida; pero puede existir un extremo (solución de la cuestión 3).

6. **F**. Puede tener extremos en algún punto de la frontera, aunque sus derivadas parciales no sean nulas en dicho punto.

7. **V**. Si la matriz hessiana es semidefinida se trata de un caso dudoso, sin solución única, lo que no significa que no podamos afirmar nada:

   - Si es semidefinida positiva, para algún $d\vec{x}$ será $d^2f > 0 \Longrightarrow \Delta f > 0$ (la función crece al apartarnos del punto, al menos en una dirección), luego no puede tratarse de un máximo.

   - Si es semidefinida negativa, para algún $d\vec{x}$ será $d^2f < 0 \Longrightarrow \Delta f < 0$ (la función decrece al apartarnos del punto, al menos en una dirección), luego no puede tratarse de un mínimo.

c) Sea la ecuación $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y = 0$. Sean los puntos $P(0,0)$ y $Q(-1,-1)$.

8. **V**. La función y sus derivadas parciales respecto a x e y son continuas en todo punto. En P se anula F y no su derivada respecto a y, luego se cumplen las condiciones.

9. **F**. La función y sus derivadas parciales respecto a x e y son continuas en todo punto. En Q se anula F y también su derivada respecto a y, luego no se cumplen las condiciones.

10. **V**. En P la $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, por lo que $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = 0$.

d) Buscamos los extremos de $f(x,y,z)$, con las ligaduras $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

11. **F**. $\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$ para los que se cumple el enunciado, pero no se cumple $\boxed{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$.

12. **F**. Si las derivadas segundas de la funciones g_i no son nulas, sus diferenciales formarán parte de la diferencial segunda de la función lagrangiana, por lo que las condiciones de ligadura influirán en el tipo de extremo.

13. **V**. Véase apdo. **2.11.2.**

14. **V**. Véase apdo. **2.11.2.**

2.12.4. Solución de las cuestiones

Cuestión 1. Definimos limite y derivada direccionales:

El **límite direccional** es el valor al que tiende f cuando nos acercamos a $\vec{a}$ a través del subconjunto $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\omega}\}$. Es decir, se obtiene como $\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega})$.

La **derivada direccional** viene dada por la expresión:

$$D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega}) - f(\vec{a})}{\lambda}$$

Entonces:

a) El límite de f en $\vec{a}$ es el valor al que tiende f cuando $\vec{x} \to \vec{a}$ por cualquier camino. Si existe, cualquier límite direccional coincide con él. Si el límite direccional depende de la dirección, no tendrá un valor único y no existirá límite funcional. **La afirmación es verdadera**.

b) Si f es diferenciable, tiene derivadas direccionales y se cumple $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$. Entonces la derivada direccional depende de la dirección (dada por $\vec{\omega}$). **La afirmación es falsa**.

Cuestión 2. Definimos las condiciones necesaria y suficiente:

Condición necesaria: Si f es diferenciable en D, tiene derivadas direccionales en D y se cumple: $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$.

Condición suficiente: Si f tiene derivadas parciales continuas en D, es diferenciable en D.

Entonces:

a) Si f cumple la condición suficiente, entonces es diferenciable, por lo que cumple la condición necesaria. **La afirmación es verdadera**.

b) Si f cumple la condición necesaria, tiene derivadas direccionales, luego tiene derivadas parciales (que son un caso particular). Pero no podemos asegurar que estas sean continuas, por lo que no se cumple la condición suficiente. **La afirmación es falsa**.

Cuestión 3. Se dice en el enunciado que el límite no tiene valor finito, lo cual sólo es cierto si el numerador es distinto de cero. Si el numerador es nulo, también lo es el límite. En efecto, si calculamos el límite tomando para $\vec{\omega}$ las direcciones de los vectores unitarios $\vec{\omega}_1 = (1, 0)$ y $\vec{\omega}_2 = (0, 1)$, que corresponden a las direcciones de los ejes, obtenemos los valores

$$D_{(1,0)}\vec{f}(0,0) = \cdots = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1 \cdot 0}{\lambda} = 0, \quad D_{(0,1)}\vec{f}(0,0) = \cdots = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0 \cdot 1}{\lambda} = 0$$

que coinciden con los de las derivadas parciales, por lo que **no existe contradicción**.

Cuestión 4. Si f tiene dos variables x e y, su vector gradiente tiene como componentes las derivadas parciales de f respecto a x e y, por lo que será un vector de $\mathbb{R}^2$.

Este vector no indica la dirección de mínima variación de la función f, sino la de variación máxima. La variación será mínima (nula) en la dirección perpendicular al vector gradiente en cada punto, que es la condición de las curvas de nivel. Esto se puede justificar a partir de la fórmula de la derivada direccional

$$D_{\vec{\omega}} f = \vec{g}^t \cdot \vec{\omega} = \|\vec{g}\|\|\vec{\omega}\| \cos\varphi = \|\vec{g}\| \cos\varphi$$

donde vemos que la variación será máxima en la dirección dada por el vector gradiente: si $\varphi = 0$, el $\cos\varphi$ vale 1. Será mínima (nula) en la dirección perpendicular: si $\varphi = \pi/2$, el $\cos\varphi$ vale 0.

Así pues, aunque su primera parte es verdadera, **la afirmación es falsa**.

Cuestión 5. El teorema afirma lo siguiente:
Sea F una función continua de dos variables. Sea la ecuación $F(x, y) = 0$. Si las derivadas parciales $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$ son continuas y existe un punto $P(a, b)$ en el cual se cumple

$$F(a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

entonces $F(x, y) = 0$ define como función implícita de x a una única función continua $y = \psi(x)$, en un entorno de $x = a$, $y = b$, la cual es diferenciable.

Cuestión 6. Como el punto $P(\pi/2, \pi/2)$ cumple las condiciones del teorema, existe un entorno suyo* en el que existe una única función implícita (la función $y = x$). En cambio, $Q(0, 0)$ no cumple la condición "derivada respecto a y distinta de cero", por lo que no podemos asegurar que en algún entorno suyo haya una única función. De hecho, en todo entorno suyo existen cuatro soluciones de la ecuación $F(x, y) = 0$: las rectas $y = \pm x$, $y = 0$, $x = 0$, que se cortan en el origen.
Tomemos, por ejemplo, cualquier punto en la recta $y = 0$, distinto del origen, por ejemplo $R(1, 0)$. Vemos que en él sí se cumplen las condiciones del teorema y, por tanto, en un cierto entorno suyo** existe una única función implícita (que ahora es la función $y = 0$).

(*) Existen infinitos entornos. Por ejemplo, los círculos de centro en P y radio $r < 1$.

(**) Existen infinitos entornos. por ejemplo, los círculos de centro en R y radio $r < \dfrac{1}{2}$.

Tema 3

Series numéricas

3.1. Definición

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, queremos obtener la suma de sus términos. Al tratarse de infinitos sumandos, no podemos efectuar la suma directamente.

La manera de hacerlo es definir una nueva sucesión cuyos elementos sean las sumas de los términos de $\{a_n\}$, en número creciente, y tomar límites, cuando ese número tienda a ∞.

Así pues,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

$\{S_n\}$ es la **sucesión de sumas parciales** asociada a $\{a_n\}$, a la que llamaremos **serie**. Los sumandos $a_1, a_2, \ldots$ son los **términos de la serie** y a_n es el **término general**.

Obtendremos la suma de la serie calculando el límite de la sucesión de sumas parciales:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Representaremos preferentemente una serie como

$$\sum a_n$$

reservando para su suma la expresión:

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

No obstante, esta segunda forma -que tiene la ventaja de indicar el primer elemento considerado- se utiliza también con frecuencia para referirse a la serie.

Carácter. Llamamos carácter de una serie al de la sucesión de sumas parciales. Entonces diremos que una serie es:

a) Convergente, si y sólo si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. El límite S es la **suma de la serie**.

b) Divergente, si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |S_n| = \infty$.

c) Oscilante, si no converge ni diverge.

Ejemplos de series.

- La serie de las potencias de $\frac{1}{2}$: $\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- La serie armónica (inversos de los naturales): $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$
- La serie de las potencias de (-1): $\sum (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Veremos más adelante que la primera converge, la segunda diverge y la tercera oscila.

3.2. Serie geométrica

Una vez definidas las series, vamos a estudiar un caso particular de gran utilidad: la serie geométrica, en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante llamada **razón**. Sus sucesivos términos son:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} r = a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

Carácter. Para estudiarlo, calculamos primero la suma de n términos a partir del primero de ellos y la razón y hacemos luego tender n a infinito. La suma S_n vale:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Multiplicando por r,

$$S_n\, r = a_1 r + a_2 r + a_3 r + \cdots + a_n r$$

Restamos ahora ambas expresiones, recordando que cada término es igual al anterior multiplicado por r, por lo que desaparecen todos los términos excepto dos. Obtenemos:

$$S_n\,(1 - r) = a_1 - a_n r = a_1 - a_1 r^{n-1} r = a_1 - a_1 r^n$$

de donde despejamos S_n:

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)}$$

Resultan los siguientes casos:

$$\begin{aligned} r > 1 &\implies S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} && \implies S_n \to \infty \cdot \text{signo}(a_1) && \text{(D)} \\ r = 1 &\implies S_n = n\, a_1 && \implies S_n \to \infty \cdot \text{signo}(a_1) && \text{(D)} \\ -1 < r < 1 &\implies r^n \to 0 && \implies S_n \to \frac{a_1}{1 - r} && \text{(C)} \\ r = -1 &\implies S_n = a_1 - a_1 + a_1 - \dots && \implies S_n = \begin{cases} a_1, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} && \text{(O)} \\ r < -1 &\implies |S_n| = \left|\frac{a_1}{r - 1}\right| |r^n - 1| && \implies |S_n| \to \infty && \text{(D)} \end{aligned}$$

Así pues, la serie geométrica sólo converge para $|r| < 1$. En los demás casos diverge u oscila.

3.3. Condición necesaria de convergencia

Teorema. *Si una serie converge, su término general tiende a 0* (condición no suficiente).

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Demostración. Si $\sum a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales tiene límite, cuando $n \to \infty$. Este límite será el mismo, tanto si tomamos n términos como $n-1$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

3.4. Propiedades de las series numéricas

1) *Si intercalamos en la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un número finito de términos de suma b, el carácter de la serie $\sum_n a_n$ no varía y, si converge, su suma aumenta en b.*

D: Sea $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = b$. Tomando una suma parcial suficientemente avanzada, de modo que los contenga a todos, resulta:

$$S'_{n+q} = S_n + b \implies \lim_{n\to\infty} S'_{n+q} = \lim_{n\to\infty} (S_n + b)$$

Entonces, por las propiedades de los límites, tenemos tres casos:

- Si S_n es convergente a S, S'_n es convergente a $S + b$.
- Si S_n es divergente, S'_n es divergente.
- Si S_n es oscilante, S'_n es oscilante.

Nota. *Si suprimimos en $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un número finito de términos de suma b, el carácter de la serie no varía y, si converge, su suma disminuye en b.* Se demuestra análogamente, sumando los opuestos de los términos que queremos suprimir.

2) *Si multiplicamos todos los términos de una serie por un número real $\lambda \neq 0$, su carácter no varía y, si converge, su suma queda multiplicada por λ.*

D: La nueva sucesión de sumas parciales es:

$$\begin{aligned}
S'_1 &= \lambda a_1 && = \lambda S_1 \\
S'_2 &= \lambda a_1 + \lambda a_2 && = \lambda S_2 \\
&\vdots \\
S'_n &= \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda S_n \implies \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda S_n)
\end{aligned}$$

con lo que, por las propiedades de los límites, ambas series tienen el mismo carácter.

3) *Si una serie es **convergente o divergente**, se pueden sustituir varios términos por su suma efectuada sin que varíe el carácter (ni la suma, si converge).*

D: Al sustituir algunos términos por su suma, la nueva sucesión de sumas parciales $\{S'_n\}$ tendrá menos términos que la antigua $\{S_n\}$, pero todos los términos de la nueva pertenecerán a la antigua. Es decir, $S'_1, S'_2, \ldots S'_n$ es una subsucesión de $S_1, S_2, \ldots S_n$. Entonces:

a) Si S_n converge, S'_n tiene igual límite (prop. 7 de los límites de sucesiones).

b) Si S_n diverge, S'_n diverge. En efecto, al ser S'_n subsucesión de S_n, los términos de S'_n pertenecen también a S_n, por lo que cumplen la condición de divergencia.

4) Si en una serie suprimimos los n primeros términos, la serie resultante se llama **resto de orden** n: $R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\dots$ Se cumple que *el resto de orden n de una serie convergente es convergente y su suma tiende a 0 cuando* $n \to \infty$.

D: Dada una serie convergente, su suma parcial de orden p es $S_p = \sum_{i=1}^{p} a_i$ y la suma de la serie (que expresamos como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$) valdrá $S = \lim\limits_{p\to\infty} S_p$.

Para un n dado, la serie resto R_n se obtiene eliminando de la inicial los n primeros términos, de suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Las sumas parciales de R_n serán las de la serie inicial, disminuidas en el valor S_n, es decir $R_n^p = \sum_{i=n+1}^{p} a_i = S_p - S_n$.

Entonces, haciendo $p \to \infty$, la suma R_n^∞ de la serie R_n será:

$$R_n^\infty = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \lim_{p\to\infty} (S_p - S_n) = S - S_n \in \mathbb{R}$$

con lo que el resto R_n es una serie convergente.

Si ahora hacemos tender $n \to \infty$, se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0$.

5) Dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$, su **combinación lineal** es la serie cuyo término general es la combinación lineal de los términos generales, $\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$. Se cumple que *la combinación lineal de series convergentes es convergente y su suma es la combinación lineal de las sumas.*

D: Si ambas series convergen, sus sumas parciales $S_n^a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $S_n^b = \sum_{i=1}^{n} b_i$ cumplirán: $\{S_n^a\}_{n\in\mathbb{N}} \to S^a$, $\{S_n^b\}_{n\in\mathbb{N}} \to S^b$. La suma parcial de la serie c.l. será $\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i = \alpha S_n^a + \beta S_n^b$ y tendremos, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha S_n^a + \beta S_n^b\right) = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n^a + \beta \lim_{n\to\infty} S_n^b = \alpha S^a + \beta S^b.$$

Las dos siguientes propiedades se refieren sólo a **series de términos positivos** (S.T.P.). Como se justifica más adelante (apdo. **3.6**), estas series nunca son oscilantes.

6) *Si alteramos el orden de los términos de una S.T.P. no varía el carácter (ni la suma, si converge).*

D: Sean $\sum a_n$ y $\sum a'_n$ las mismas series con los términos en distinto orden.

Al tener ambas los mismos términos (y ser éstos no negativos), para toda suma parcial de $\sum a_n$ podemos encontrar una suma parcial de $\sum a'_n$ que la supere: basta tomar un índice m tal que S'_m contenga todos los términos de S_n, por lo que $n \le m$.

Podemos ahora hacer lo mismo con S'_m, encontrando un índice p tal que S_p contenga todos los términos de S'_m, con lo que $m \le p$. Entonces:

$$\forall n \;\exists\; m, p \,/\, S_n \le S'_m \le S_p \quad (n \le m \le p)$$

Como S_n y S_p son distintas sumas parciales de la misma serie de términos positivos, tendrán el mismo límite (finito o infinito). Por lo tanto:

- Si S_n converge, S'_m también lo hace (prop. 6 de los límites de sucesiones).
- Si S_n diverge a ∞, al ser $S_n \le S'_m$, ésta tambien lo hace.

Luego la suma parcial de la serie reordenada tiene igual límite que la de la original:

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{(finito o infinito)}.$$

7) *Si se agrupan un número finito o infinito de términos de una S.T.P. o se descomponen en suma de términos* ***positivos****, no se altera el carácter de la serie (ni la suma, si converge).*

D: Como las S.T.P. no son oscilantes, podemos aplicar la prop. 3 de las series. Entonces:

a) Si agrupamos términos de la serie $\sum a_n$, no varían el carácter ni la suma.

b) Si descomponemos términos de $\sum a_n$ en suma de términos positivos obtendremos una nueva serie $\sum a'_n$. Si, partiendo ahora de $\sum a'_n$, reagrupamos los términos que antes descompusimos, obtendremos de nuevo la serie inicial $\sum a_n$. Pero esta, por la prop. 3 de las series, tendrá igual carácter y suma que $\sum a'_n$.

Así pues, tanto si agrupamos términos como si los descomponemos en suma de términos positivos, no varía el carácter (ni la suma, si converge).

3.5. Criterio de convergencia de Cauchy

Dada una sucesión $\{a_n\}$, hemos definido su serie asociada $\sum a_n$ como la sucesión $\{S_n\}$, de sumas parciales de los elementos a_n:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

de modo que la serie converge si y sólo si lo hace $\{S_n\}$. Como vimos al estudiar los números reales, en $\mathbb{R}$ una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy. Entonces $\sum a_n$ será convergente si y sólo si la sucesión $\{S_n\}$ es de Cauchy. Esta condición puede expresarse de dos maneras:

a) $\boxed{\sum a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |S_p - S_q| < \varepsilon, \ \forall p, q \geq n_0}$

La serie converge si la diferencia en valor absoluto de dos sumas parciales suficientemente avanzadas es tan pequeña como queramos.

Sea $p > q$. Entonces $S_p - S_q$ puede escribirse como: $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} a_i = \sum_{i=q+1}^{p} a_i$.

Si en la expresión anterior hacemos $q = m$ y $p - q = t$, es decir $p = m + t$, la condición se convierte en la que se muestra a continuación.

b) $\boxed{\sum a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left| \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \right| < \varepsilon, \ \forall m \geq n_0, \ \forall t \in \mathbb{N}}$

Es decir, la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la suma de un número cualquiera de términos, a partir de uno dado m, se puede hacer tan pequeña como se quiera sin más que tomar un m suficientemente alto. Esta condición se usará en el criterio de convergencia de la mayorante y la minorante, que veremos a continuación (apdo. **3.6.1**).

Que esta expresión pueda hacerse tan pequeña como se quiera, para m suficientemente alto, equivale decir que tiene límite cero, si m tiende a ∞. Es decir, la condición **b)** puede también escribirse como

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \lim_{m \to \infty} \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i = 0, \ \forall t \in \mathbb{N}$$

3.6. Series de términos positivos

Definición. Llamamos series de términos positivos (S.T.P.) a aquellas cuyos **términos** son **mayores o iguales a cero**. Como consecuencia,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ a_i \geq 0 \Longrightarrow S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \ldots$$

Es decir, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente. Luego caben dos opciones:

a) $\{S_n\}$ está acotada, luego converge (por ser monótona creciente acotada).

b) $\{S_n\}$ no está acotada, luego diverge (sus términos llegan a superar cualquier valor).

Por lo tanto, **una S.T.P. sólo puede ser convergente o divergente**, nunca oscilante.
A continuación estudiaremos distintos criterios de convergencia para este tipo de series.

3.6.1. Mayorante y minorante

Sean las S.T.P. $\sum a_n$ y $\sum b_n$. Decimos que $\sum b_n$ es mayorante de $\sum a_n$ si y sólo si:

$$\boxed{a_n \leq b_n,\ \forall n \geq n_1}$$

Si $\sum b_n$ es mayorante de $\sum a_n$, se dice que esta es minorante de $\sum b_n$.

Ejemplos.

1. $\sum \dfrac{1}{n+7}$ es minorante de $\sum \dfrac{1}{n}$, pues $\dfrac{1}{n+7} < \dfrac{1}{n}\ \forall n$.
2. $\sum \dfrac{1}{n+7}$ es mayorante de $\sum \dfrac{1}{n^2}$, pues $\dfrac{1}{n+7} > \dfrac{1}{n^2}\ \forall n > 3$.

Se cumple:

a) Si la mayorante es convergente, la minorante también lo es.

b) Si la minorante es divergente, la mayorante también lo es.

Demostración. Aplicando la condición de mayorante $\forall m \geq n_1$, se cumplirá:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{m+1} \leq b_{m+1} \\ a_{m+2} \leq b_{m+2} \\ \vdots \\ a_{m+t} \leq b_{m+t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \leq \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i,\ \forall m \geq n_1, \forall t \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

a) Por el criterio general de convergencia de Cauchy (apdo. **3.5**), resulta:

$$\sum b_n \text{ convergente} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \,/\, \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i < \varepsilon,\ \forall m \geq n_0,\ \forall t \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Por tanto, teniendo en cuenta las condiciones (3.1) y (3.2),

$$\exists n = \text{máx}(n_0, n_1) \,/\, \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \leq \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i < \varepsilon,\ \forall m \geq n, \forall t \in \mathbb{N}$$

luego $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ también lo es, por reducción al absurdo.
En efecto, si $\sum b_n$ no diverge, al ser de términos positivos tiene que converger, con lo que su minorante $\sum a_n$ también sería convergente, contra la hipótesis.

3.6.2. Serie de Riemann

Es cualquier serie de la forma $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0}$

A partir del criterio anterior (**3.6.1**) y del carácter de la serie geométrica, resulta:

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1, \text{ la serie converge. Si } \alpha \leq 1, \text{ la serie diverge}}$$

Demostración. Escribimos la expresión de la suma parcial S_n de la serie de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

Como se trata de una serie de términos positivos, podemos agrupar sus términos. Tomamos grupos de un número creciente de términos: 1, 2, 4, 8, 16. . . .

$$S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}\right) + \ldots$$

Escribimos ahora las expresiones de una minorante S_n^- y una mayorante S_n^+, de S_n:

$$\begin{aligned} S_n^- &= \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{16^\alpha} + \cdots + \frac{1}{16^\alpha}\right) + \ldots \\ S_n^+ &= \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Entre ellas, $\forall n > 2$, se cumple la relación:

$$S_n^- < S_n < S_n^+$$

Estudiamos ahora S_n^+, agrupando los términos de igual valor:

$$S_n^+ = 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots = 1 + 2^{1-\alpha} + 4^{1-\alpha} + 8^{1-\alpha} + \ldots$$

y S_n^+ resulta ser una serie geométrica de razón $r = 2^{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$, se cumplirá:

$$1 - \alpha < 0 \Longrightarrow 0 < 2^{1-\alpha} < 1$$

con lo que la razón es menor que 1 en valor absoluto, luego S_n^+ converge (apdo. **3.2**). Entonces su minorante S_n converge también (apdo. **3.6.1**).

Haciendo lo mismo con S_n^-,

$$S_n^- = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \frac{4}{8^\alpha} + \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \ldots\right)$$

y hemos obtenido de nuevo una serie geométrica de razón $r = 2^{1-\alpha}$. Si $\alpha \leq 1$, se cumplirá:

$$1 - \alpha \geq 0 \Longrightarrow 2^{1-\alpha} \geq 1$$

con lo que la razón es mayor o igual que 1, luego S_n^- diverge (apdo. **3.2**). Entonces su mayorante S_n diverge también (apdo. **3.6.1**).

Por lo tanto,

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}, \quad \alpha \leq 1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

Ejemplos. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ y $\sum \frac{1}{n}$ (armónica) divergen, mientras que $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ convergen.

Ejercicios. Teniendo en cuenta los apartados **3.6.1** y **3.6.2**, estudia el carácter de las series siguientes:

$$\sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^\pi} \ \text{(C)}\,; \qquad \sum \frac{2+\cos n}{n^{\pi-3}} \ \text{(D)}$$

3.6.3. Comparación de series

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$, $a_n, b_n > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, ambas series tienen el mismo carácter

Demostración. La existencia del límite k equivale a que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \,/\, \left|\frac{a_m}{b_m} - k\right| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n$$

de donde:

$$k - \varepsilon < \frac{a_m}{b_m} < k + \varepsilon \Longrightarrow (k-\varepsilon)\, b_m < a_m < (k+\varepsilon)\, b_m, \quad \forall m \geq n$$

A partir de la relación anterior, si $\sum b_n$ diverge, $\sum (k-\varepsilon)\, b_n$ diverge, pues su término general es el de $\sum b_n$ multiplicado por una constante. Luego su mayorante $\sum a_n$ diverge.

Igualmente, si $\sum b_n$ converge, $\sum (k+\varepsilon)\, b_n$ converge, luego su minorante $\sum a_n$ también lo hace. Por lo tanto, sea cual sea el carácter de la serie $\sum b_n$, el de $\sum a_n$ será el mismo.

Aplicación. Al estudiar series de términos positivos, podemos **sustituir el término general por un infinitésimo equivalente**, sin que varíe el carácter.

Nota. Aunque el límite del cociente de los términos generales no sea un $k \neq 0$, existen dos casos en los que ambas series tienen igual carácter. A partir de la definición de límite y el criterio de la mayorante, se demuestra lo siguiente:

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Ejemplo 1.

a) La serie $\sum \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ tiene igual carácter que $\sum \frac{1}{n}$ (armónica), luego diverge.

b) La serie $\sum \left(e^{1/n^2} - 1\right)$ tiene igual carácter que $\sum \frac{1}{n^2}$ (Riemann, $\alpha = 2$), luego converge.

c) Sea $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Sea $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ ($\alpha > 1$, convergente). $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Longrightarrow \sum a_n$ converge.

Como vemos, combinando **3.6.2** y **3.6.3** podemos estudiar el carácter de algunas series:

1. Hallamos un infinitésimo a'_n (equivalente a a_n), de expresión más sencilla.
2. Si $\sum a'_n$ tiene igual carácter que una serie de Riemann, lo averiguamos por el valor de α.

Ejemplo 2. Estudiamos el carácter de las series de término general a_n:

a) $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{2n+1}{n^3} \sim \dfrac{2n+1}{n^3} \sim \dfrac{2}{n^2} \Rightarrow \sum a_n$ tiene igual carácter que $2\sum \dfrac{1}{n^2}$, luego converge.

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+4\ln n}} = \dfrac{1}{\sqrt{4n}\sqrt{1+(\ln n)/n}} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{1/2}} \Rightarrow \sum a_n$ diverge, pues $\alpha = 1/2 < 1$.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ (C); $\sum \dfrac{k^2}{(n+k)^2}, k \in \mathbb{R}$ (C).

Los cuatro siguientes criterios se enuncian de dos formas. **La primera** expresa una condición a partir de un término dado y **se utiliza para demostrar los criterios**. **La segunda** consiste en el cálculo de un límite y **es más sencilla para aplicarlos**.
Si se cumple la segunda condición, se cumple la primera, como se demuestra en **3.6.4**.

3.6.4. Criterio de la raíz (Cauchy-Hadamard)

$$\boxed{\text{a) Si } \forall m \geq n_0 \begin{cases} \sqrt[m]{a_m} \leq k < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \sqrt[m]{a_m} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \end{cases}} \tag{3.3}$$

$$\boxed{\text{b) Si } \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Rightarrow \text{ dudoso (si } \sqrt[n]{a_n} \to 1^+, \text{ D)} \end{cases}} \tag{3.4}$$

Demostración. Suponemos que se cumplen las condiciones (3.3). Entonces:

a.1. Si $\forall m \geq n_0$, $\sqrt[m]{a_m} \leq k < 1$, entonces $a_m \leq k^m$, con $k < 1$.
Por tanto $\sum a_n$ es minorante de una geométrica convergente, luego es convergente.

a.2. Si $\forall m \geq n_0$, $\sqrt[m]{a_m} \geq 1$, entonces $a_m \geq 1$.
Por tanto $\sum a_n$ es mayorante de la serie de término general $a_n = 1$, luego es divergente.

Nota. Si se cumplen las condiciones (3.4), se cumplen también las (3.3). En efecto:

b.1. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, tomamos un valor entre l y 1 $\big($p. ej. $k = (l+1)/2\big)$, luego $l < k < 1$.
Por las propiedades de los límites, si el límite es menor que k, los términos también lo serán a partir de uno dado, es decir:

$$\exists n_0 \,/\, \sqrt[m]{a_m} < k < 1, \forall m \geq n_0$$

Entonces se cumple la condición a.1 y la serie $\sum a_n$ converge.

b.2. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$, los términos serán mayores que 1 a partir de uno dado, es decir:

$$\exists n_0 \,/\, \sqrt[m]{a_m} > 1, \forall m \geq n_0$$

Entonces se cumple la condición a.2 y la serie $\sum a_n$ diverge.

b.3. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1^+$ (los términos tienden a 1 por la derecha), entonces serán mayores o iguales que 1 a partir de uno dado, por lo que:

$$\exists n_0 \,/\, \sqrt[m]{a_m} \geq 1, \forall m \geq n_0$$

Entonces se cumple también la condición a.2 y la serie $\sum a_n$ diverge.

Aplicación. Este criterio está especialmente indicado cuando a_n contiene potencias $n-$ésimas. Es válido también con expresiones factoriales, utilizando la fórmula de Stirling.

Ejemplo. Carácter de $\sum \dfrac{P(n)}{2^n}$. Calculamos $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ (C); $\sum \dfrac{e^n}{n^3}$ (D); $\sum \dfrac{\ln n}{n^n}$ (C); $\sum \dfrac{n^2}{n!}$ (C).

3.6.5. Criterio del cociente (D'Alembert)

$$\boxed{\textbf{a)}\ \text{Si } \forall m \geq n_0 \begin{cases} \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \leq k < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \end{cases}} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\textbf{b)}\ \text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Rightarrow \text{ dudoso (si } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1^+, \text{ D)} \end{cases}} \tag{3.6}$$

Demostración. Partimos de las condiciones (3.5):

a.1. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \leq k < 1$, entonces $a_{m+1} \leq k\, a_m$. Dando valores a m, obtenemos:

$$\begin{array}{lllll} a_{n_0+1} & \leq & k\, a_{n_0} & = & k\, a_{n_0} \\ a_{n_0+2} & \leq & k\, a_{n_0+1} & \leq & k^2\, a_{n_0} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Sumando en ambos miembros, resulta $\sum_{n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0}\,(1 + k + k^2 + \dots)$, por lo que $\sum a_n$ converge, al ser $a_{n_0}(1 + k + k^2 + \dots)$ una serie geométrica de razón $k < 1$ (convergente).

a.2. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq 1$, entonces $a_{m+1} \geq a_m$, por lo que $\{a_n\}$ es monótona creciente a partir de $n = n_0$. Además, al ser a_{n_0} positivo (pues existe el cociente para $m = n_0$), se cumplirá:

$$a_m \geq a_{n_0} > 0,\ \forall m \geq n_0$$

luego a_n no puede tener límite nulo y no se cumple la condición necesaria de convergencia. Así pues, $\sum a_n$ no converge, por lo que (al ser de téminos positivos), diverge.

Nota. Sabemos, por la "regla de la raíz" de las sucesiones (C. Inf. 1, apdo. **3.5.4**) que, si existe el límite del cociente, existe el de la raíz y coinciden, es decir:

$$\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces, siempre que existe el límite del cociente, existe el de la raíz, pero puede ocurrir que el límite del cociente no exista y sí lo haga el de la raiz. Por tanto, el criterio de la raiz soluciona un mayor número de casos que el del cociente.

Aplicación. Este criterio está especialmente indicado cuando el término general contiene factoriales y también da buen resultado con potencias n-ésimas.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series.

1. $\sum \dfrac{2^n}{n!}$. Calculamos $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ C.

2. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{\sqrt{n}}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{\ln n}{n!}$ (C); $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^n}$ (C); $\sum \dfrac{\ln n}{e^n}$ (C); $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ (D).

3.6.6. Criterio de Raabe

$$\boxed{\textbf{a)}\ \text{Si } \forall m \geq n_0 \begin{cases} m\left(1 - \dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right) \geq k > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ m\left(1 - \dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right) \leq 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \end{cases}} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\textbf{b)}\ \text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l \begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Rightarrow \text{ dudoso (si } n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1^-, \text{ D)} \end{cases}} \tag{3.8}$$

(Puede verse la demostración en J. Burgos, p. 456).

Nota. En este criterio, al revés que en los de Cauchy y D'Alembert, la convergencia se obtiene para valores de l mayores que 1 y la divergencia para valores menores que 1.

Aplicación. Este criterio es particularmente útil cuando resulta un caso dudoso al aplicar D'Alembert, pues ya tenemos calculado el cociente entre a_{n+1} y a_n.

Ejemplo. Estudiamos la serie de término general $a_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$, $a, b > 0$.

La expresión de a_n sugiere utilizar el criterio de D'Alembert. Calculamos el límite del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{a+n+1}{b+n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

luego es un caso dudoso, por lo que aplicamos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a+n+1}{b+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n+1-(a+n+1)}{b+n+1}\right) = b - a$$

Por tanto:

- Si $b - a > 1$ ($\Leftrightarrow b > a+1$), la serie es convergente.
- Si $b - a < 1$ ($\Leftrightarrow b < a+1$), la serie es divergente.
- Si $b - a = 1$ ($\Leftrightarrow b = a+1$), es de nuevo un caso dudoso. Sustituímos en el término general:

$$a_n = \cdots = \frac{a}{n+a+1} = a\,\frac{1}{n+a+1} \sim a\,\frac{1}{n} \Longrightarrow \text{ D (armónica)}$$

Así pues, la serie converge si $b > a+1$ y diverge en los demás casos.

Ejercicio. Estudia el carácter de la serie $\sum \dfrac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$, $a>0$.

Solución. Si $a>2$, converge; Si $a\leq 2$, diverge.

3.6.7. Criterio logarítmico

$$\boxed{\textbf{a)}\ \text{Si } \forall m\geq n_0 \begin{cases} \dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m}\geq k>1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m}\leq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \end{cases}} \tag{3.9}$$

$$\boxed{\textbf{b)}\ \text{Si } \exists \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=l \begin{cases} l>1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l<1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l=1 \Rightarrow \text{ dudoso (si } \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}\to 1^-\text{, D)} \end{cases}} \tag{3.10}$$

Demostración. Partimos de las condiciones (3.9)

a.1. Si $\forall m\geq n_0$, $\dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m}\geq k>1$, entonces $\ln(1/a_m)\geq k\ln m=\ln m^k$.

Elevamos e a la expresión en ambos lados de la desigualdad, obteniendo $\dfrac{1}{a_m}\geq m^k$.

Despejando a_m, resulta $a_m\leq \dfrac{1}{m^k}$, $k>1$, $\forall m\geq n_0$.

Entonces $\sum a_n$ es minorante de una serie de Riemann convergente ($\alpha>1$), luego converge.

a.2. Si $\forall m\geq n_0$, $\dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m}\leq 1$, entonces $\ln(1/a_m)\leq \ln m$.

Elevamos e a la expresión en ambos lados de la desigualdad, obteniendo $\dfrac{1}{a_m}\leq m$.

Despejando a_m, resulta $a_m\geq \dfrac{1}{m}$, luego $\sum a_n$ es mayorante de la armónica, divergente.

Nota. En este criterio, como en el de Raabe, la convergencia se obtiene para valores de l mayores que 1 y la divergencia para valores menores que 1.

Aplicación. Este criterio suele dar buen resultado cuando a_n contiene logaritmos.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series:

1. $\sum \dfrac{1}{2^{\ln n}}$. Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 2^{\ln n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n\ln 2}{\ln n}=\ln 2<1\Rightarrow$ D.
2. $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n>1$. Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\ln n)^{\ln n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n\ln(\ln n)}{\ln n}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\ln n)=\infty>1\Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^q}$, $n>1, q\in\mathbb{R}$ (D); $\sum \dfrac{1}{\ln(n^{\ln n})}$, $n>1$ (D).

3.6.8. Criterio de condensación

Cada uno de los últimos cuatro criterios estudiados es especialmente adecuado en ciertos casos (término general con potencias n-ésimas, factoriales o logaritmos; o caso dudoso por D'Alembert). El criterio de condensación resuelve algunas series cuyo carácter resulta dudoso por los anteriores, por lo que generalmente no será el primer criterio que apliquemos.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión **monótona decreciente**, se cumple:

$$\boxed{\text{Las series } \sum a_n \text{ y } \sum 2^n a_{2^n} \text{ tienen el mismo carácter}}$$

Demostración. Buscamos una mayorante y una minorante de $\sum a_n$. Para ello tenemos en cuenta lo siguiente:

- Al ser de términos positivos podemos agruparlos sin que varíe el carácter.
- Como $\{a_n\}$ es monótona decreciente, se cumplirá $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \dots \\
\sum a_n &\geq a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + (a_{16} + \cdots + a_{16}) + \dots \\
\sum a_n &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + \cdots + a_8) + \dots
\end{aligned}$$

Agrupando los sumandos iguales en las expresiones anteriores, resulta

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots \leq \sum a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \dots$$

es decir

$$\frac{1}{2}\sum 2^n a_{2^n} \leq \sum a_n \leq a_1 + \sum 2^n a_{2^n}$$

De estas desigualdades deducimos (por el criterio de la mayorante y la minorante):

- Si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge, también lo hace $\sum a_n$ (minorante suya).
- Si $\sum 2^n a_{2^n}$ diverge, también lo hace $\frac{1}{2}\sum 2^n a_{2^n}$, luego $\sum a_n$ diverge (mayorante suya).

Luego ambas series tienen el mismo carácter.

Nota. Para obtener el término general de la serie $\sum 2^n a_{2^n}$, sustituímos n por 2^n en la expresión de a_n y lo multiplicamos por el factor 2^n.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series.

1. $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$. Analizamos $\sum 2^n \dfrac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum \dfrac{1}{n \ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} \sum \dfrac{1}{n}$, que es divergente.
2. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(\ln n)}$. $\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \dfrac{1}{\sqrt{2^n}\ln(\ln 2^n)} = \sum \dfrac{\sqrt{2^n}}{\ln(n \ln 2)} = \sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{\ln n + \ln(\ln 2)}$,

   que diverge pues su término general tiende a ∞.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ (D); $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ (C).

3.7. Series de términos positivos y negativos

Hemos estudiado el carácter de las series de términos positivos. Para estudiar las que contienen términos negativos, distinguimos los siguientes casos:

a) Si todos los términos de una serie son negativos, sacamos factor común el signo menos, con lo que se convierte en una serie de términos positivos, que podemos estudiar por los criterios vistos para este tipo de series.

b) Si sólo existe un número finito de términos negativos, no varían el carácter. Se pueden sumar aparte y estudiar la serie resultante de términos positivos (propiedad 1 de las series).

c) De igual modo, si los términos son negativos, excepto un número finito de términos positivos, sacamos factor común el signo menos y la convertimos en una serie de términos positivos, con un número finitos de negativos (caso b).

Así pues, **el único tipo de serie que plantea problemas nuevos es el de las que tienen infinitos términos de cada signo**. Para estudiarlo, daremos unas definiciones.

3.7.1. Convergencia y divergencia absoluta e incondicional

Dada una serie $\sum a_n$, decimos que es:

- **Absolutamente convergente (divergente)** si y sólo si la serie $\sum |a_n|$, formada por los valores absolutos de los términos, es convergente (divergente).

- **Incondicionalmente convergente o divergente** si y sólo si, al reordenar sus términos, no varía el carácter, ni la suma si es convergente.

  Si al reordenar términos varían el carácter o la suma, se dice que la serie es condicional.

Con el fin de estudiar el carácter de $\sum a_n$ vamos a descomponer su suma parcial S_n en dos sumas S_n^+ y S_n^-, cada una de las cuales contendrá los términos del mismo signo. Para ello, definimos los elementos a_i^+ y a_i^-:

$$a_i^+ = \begin{cases} a_i & a_i > 0 \\ 0 & a_i \leq 0 \end{cases}; \qquad a_i^- = \begin{cases} a_i & a_i < 0 \\ 0 & a_i \geq 0 \end{cases}$$

De este modo cada término a_i puede escribirse como suma de $a_i^+ + a_i^-$ y podemos descomponer una suma de n términos en dos sumas de n términos, S_n^+ y S_n^-, en cada una de las cuales sustituímos por cero aquellos que no son del signo correspondiente.

Entonces:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^+ + \sum_{i=1}^{n} a_i^- \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^+\right| - \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^-\right| \overset{(4)}{=} S_n^+ - S_n^-$$

donde hemos dado los siguientes pasos:

(1): Descomponer $a_i = a_i^+ + a_i^-$.

(2): Separar la suma de n pares de elementos en un par de sumas.

(3): Tener en cuenta que $a_i^+ = \left|a_i^+\right|$ y $a_i^- = -\left|a_i^-\right|$

(4): Llamar $S_n^{\pm}$ a las sumas de los $\left|a_i^{\pm}\right|$.

Una vez descompuesta S_n, observamos que las $S_n^{\pm}$ no contienen términos negativos, por lo que cumplen lo siguiente:

- O convergen o divergen (no oscilan).
- Son incondicionales, luego podemos reordenarlas sin que varíe el carácter ni la suma.

Existen las siguientes opciones: que ambas converjan, que diverja sólo una o que diverjan ambas. Tomando límites en cada caso, resulta:

a) $S_n^+ \to S^+$ y $S_n^- \to S^- \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = S^+ - S^-$.

La serie converge incondicionalmente a $S^+ - S^-$.

b) $S_n^+ \to +\infty$ y $S_n^- \to S^- \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = +\infty$.

La serie diverge incondicionalmente a $+\infty$.

c) $S_n^+ \to S^+$ y $S_n^- \to +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = -\infty$.

La serie diverge incondicionalmente a $-\infty$.

d) $S_n^+ \to \infty$ y $S_n^- \to \infty \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = ?$ (indeterminación $\infty - \infty$).

La serie puede converger, diverger u oscilar (se muestran ejemplos más abajo).

Es decir, **sólo en el primer caso la serie converge incondicionalmente** y **sólo en los tres primeros el carácter es incondicional**.

Ejemplos del caso d. Se muestran a continuación tres series, de distinto carácter, que se descomponen en subseries divergentes:

1. Esta serie alternada **converge** por el teorema de Leibnitz (**3.7.4**).

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots \longrightarrow \ln 2\,, \quad \text{siendo } \begin{cases} S_n^+ = 1 + 1/3 + 1/5 + \ldots \\ S_n^- = 1/2 + 1/4 + 1/6 + \ldots \end{cases}$$

2. En esta ocasión, tomando un número de términos tanto impar como par, las sumas parciales tienden a ∞ y la serie **diverge**.

$$1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{3} + \ldots \longrightarrow \infty\,, \quad \text{siendo } \begin{cases} S_n^+ = 1 + 2 + 3 + \ldots \\ S_n^- = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots \end{cases}$$

3. En este tercer caso, tomando un número par de términos, las sumas parciales son nulas; y, tomando un número impar, tienden a infinito, luego la serie **oscila**.

$$1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots \longrightarrow \begin{cases} \infty \\ 0\ , \end{cases} \quad \text{siendo ambas subseries: } 1 + 2 + 3 + \ldots$$

Ejercicio. Encuentra tres series, una convergente, otra divergente y otra oscilante, cuyas subseries positiva y negativa sean divergentes.

3.7.2. Teorema de Riemann

Como acabamos de ver, si las dos subseries divergen, no podemos predecir el carácter de la serie resultante. El siguiente teorema muestra el efecto adicional de reordenar sus términos.

Teorema. *Sea $\sum a_n$, tal que las subseries positiva y negativa $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son divergentes y se cumple que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Reordenando sus términos podemos conseguir que diverja, oscile o converja a cualquier suma.*

Demostración.

a) Divergente. Para formar la serie reordenada procedemos de la siguiente manera:

- Tomamos términos positivos, en el orden inicial, hasta superar el doble del valor absoluto del primer término negativo. Escribimos a continuación el primero negativo.
- Luego tomamos términos positivos, en el orden inicial, hasta superar el doble del valor absoluto del segundo término negativo. A continuación el segundo negativo.
- Y así sucesivamente...

El proceso se puede repetir indefinidamente, pues la subserie positiva diverge, luego los grupos de términos positivos que vamos tomando pueden superar cualquier valor. Resulta:

$$\sum a'_n = \underbrace{a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_\alpha^+}_{\geq 2\left|a_1^-\right|} - \left|a_1^-\right| + \underbrace{a_{\alpha+1}^+ + \cdots + a_{\alpha+\beta}^+}_{\geq 2\left|a_2^-\right|} - \left|a_2^-\right| + \cdots \geq \left|a_1^-\right| + \left|a_2^-\right| + \ldots$$

De este modo la serie reordenada es mayorante de una divergente, luego diverge.

Nótese que en este caso no hemos utilizado la condición $a_n \longrightarrow 0$.

b) Oscilante. Elegimos $k_1, k_2 \,/\, k_1 < k_2$. Manteniendo siempre el orden inicial:

- Tomamos términos positivos hasta que su suma supere k_2. A continuación términos negativos hasta que la suma total sea inferior a k_1.
- Tomamos más términos positivos hasta que la suma total supere de nuevo k_2. Y términos negativos hasta que la suma total vuelva a ser inferior a k_1.
- Y así sucesivamente...

En cada ciclo, el valor absoluto de la diferencia entre la suma parcial y el correspondiente valor k_1 o k_2 es menor o igual que el valor absoluto del último término añadido. Al ser $a_n \to 0$, las sumas parciales pueden acercarse a k_1 o k_2 tanto como queramos, por lo que la serie así reordenada es oscilante.

c) Convergente. Elegimos el valor S deseado para la suma. Manteniendo el orden inicial:

- Tomamos términos positivos hasta superar el valor S. A continuación, términos negativos hasta que la suma total sea inferior a S.
- De nuevo términos positivos hasta quedar a la superar S y a continuación términos negativos hasta que la suma total sea inferior a S.
- Y así sucesivamente...

En cada ciclo, el valor absoluto de la diferencia entre la suma parcial y el valor S es menor o igual que el valor absoluto del último término añadido. Como $a_n \to 0$, las sumas parciales pueden acercarse a S tanto como queramos, luego la serie reordenada converge a S.

3.7.3. Teorema de Dirichlet

$\sum a_n$ es incondicionalmente convergente si y sólo si es absolutamente convergente.

Demostración. Veremos que, tanto la convergencia incondicional de la serie como la absoluta, equivalen a la convergencia de las subseries de términos positivos $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$.

a) **Convergencia incondicional**: En el apdo. **3.7.1** estudiamos la convergencia incondicional de una serie de términos positivos y negativos, analizando las cuatro posibilidades para el carácter de las subseries.

Concluíamos entonces que la serie es incondicionalmente convergente **si las subseries $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ son convergentes y sólo en ese caso**.

b) **Convergencia absoluta**: La serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ será convergente **si y sólo si lo son** $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$.

Para demostrarlo, recordamos que el término general a_i podía descomponerse en $a_i^+ + a_i^-$.

Teniendo en cuenta que al menos uno de los sumandos es siempre nulo, el valor absoluto del término general, $|a_i|$, puede también descomponerse en la suma de los valores absolutos de a_i^+ y a_i^-, con lo que la serie de valores absolutos se convierte en la suma de dos subseries:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} \left(\left|a_i^+\right| + \left|a_i^-\right|\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^+\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^-\right|$$

Al ser ambos sumandos series de términos positivos, resulta:

- Si $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ convergen, $\sum |a_n|$ converge a la suma de ambas.
- Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ deben converger. De lo contrario, alguna de las dos sería divergente y $\sum |a_n|$ sería entonces divergente, contra la hipótesis.

Aplicación. El teorema nos indica el **primer paso que debemos dar** para estudiar el carácter de una serie de términos positivos y negativos: analizar la serie $\sum |a_n|$.

a) Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum a_n$ será incondicionalmente convergente, por lo que podemos reordenarla, descomponerla en las subseries positiva y negativa, etc.

b) Si $\sum |a_n|$ diverge, comprobamos si sólo una de las dos subseries lo hace, en cuyo caso $\sum a_n$ será incondicionalmente divergente.

c) Si, además de $\sum |a_n|$, ambas subseries divergen, sólo nos queda estudiar una suma parcial S_n o aplicar el teorema de Leibnitz, si se cumplen ciertas condiciones (apdo. **3.7.4**).

En este caso de subseries divergentes, si además $a_n \to 0$, la serie puede converger, diverger u oscilar según el orden que demos a sus términos (teorema de Riemann). Por ello, hemos de estudiarla en el orden dado en el enunciado.

Nota. El teorema establece la equivalencia entre la convergencia absoluta y la incondicional, mientras que no afirma nada sobre la divergencia absoluta. En el caso d) de **3.7.1** ya vimos un ejemplo de serie absolutamente divergente pero condicionalmente convergente. En el siguiente apartado veremos otros.

Ejercicio. Demuestra por reducción al absurdo que, *si $\sum a_n$ es incondicionalmente divergente, entonces es absolutamente divergente.*

3.7.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz

Llamamos **alternadas** a las series cuyos términos cambian de signo alternativamente. Vamos a estudiar un tipo particular, aquellas en las que el valor absoluto de los términos es decreciente. Escribimos una suma parcial S_n:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n \,;\ a_n > 0, \forall n;\ \ \{a_n\} \text{ monótona decreciente}$$

Para el estudio de la convergencia de estas series es de gran utilidad el siguiente teorema:

Teorema de Leibnitz. *Toda serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto, tal que su término general tiende a cero, es convergente.*

Nota. Se demuestra que la suma de la serie está entre dos sumas parciales consecutivas cualesquiera. Por ello, al tomar como suma S el valor de una suma parcial S_n, el error cometido es menor o igual que el valor absoluto del primer término despreciado, es decir a_{n+1}.

Ejemplo 1. La serie alternada de los inversos de los pares:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots \quad \left(\text{de suma } S = \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

Ejemplo 2. La serie alternada de los inversos de los impares:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \left(\text{de suma } S = \frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 3. Cálculo de la constante de Euler γ. Para ello, estudiamos la convergencia de la serie alternada siguiente.

$$\sum a_n = 1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ldots$$

Comprobamos que se cumplen las condiciones del teorema:

a) Decrece en valor absoluto. La sucesión $\left\{\left(1+1/n\right)^n\right\}$ es monótona creciente, mientras que $\left\{\left(1+1/n\right)^{n+1}\right\}$ es monótona decreciente, ambas de límite e. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \overset{\ln}{\Longrightarrow} (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ \text{ y } \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}}$$

b) El término general tiende a 0, pues sus dos expresiones lo hacen:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Como consecuencia, la serie $\sum a_n$ converge y llamamos γ (constante de Euler) a su suma. El teorema nos asegura que podemos calcular γ con la precisión deseada, siempre que sumemos un número suficiente de términos. Su valor es: $\gamma = 0.577215\ldots$

Aplicación. Suma de los n primeros términos de la serie armónica. La serie armónica es divergente. Para obtener el valor de la suma de sus n primeros términos, hacemos lo siguiente: 1) tomamos los $2n$ primeros sumandos de la serie del ejemplo 3; 2) agrupamos por separado los términos positivos y los negativos; 3) denotamos la suma de los n primeros positivos como H_n y 4) incluimos los negativos en un solo neperiano y simplificamos. Es decir,

$$S_{2n} = 1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{H_n} - \underbrace{\ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)}_{\ln(n+1)}$$

Como vimos en el ejemplo 3, esta serie tiene como suma la constante γ, por lo que su suma parcial S_{2n} será igual al valor de su límite γ más un infinitésimo θ_n. Por otra parte, como acabamos de ver, S_{2n} puede escribirse como diferencia de H_n y $\ln(n+1)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \gamma \Longrightarrow S_{2n} = \gamma + \theta_n = H_n - \ln(n+1)$$

Despejamos H_n y operamos para separar el $\ln n$,

$$H_n = \ln(n+1) + \gamma + \theta_n = \ln\frac{n+1}{n}\,n + \gamma + \theta_n = \underbrace{\ln\frac{n+1}{n}}_{\theta'_n} + \ln n + \gamma + \theta_n = \ln n + \gamma + \theta_n + \theta'_n$$

Agrupando θ_n y θ'_n en un único infinitésimo ε_n, obtenemos el valor de la suma de los n primeros sumandos de la serie armónica:

$$\boxed{H_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \gamma + \varepsilon_n}$$

Esta expresión nos dice que H_n es un infinito equivalente a $\ln n$ y nos resultará útil para sumar algunos tipos de series (apdo. **3.8.2**). También sirve para resolver límites formados por un número de sumandos que tiende a ∞, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. Calcula $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

Observamos que los denominadores están formados por los números naturales consecutivos desde $n+1$ hasta $2n$, por lo que la suma se puede escribir como diferencia de H_{2n} y H_n. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{\ln 2n}_{\ln 2+\cancel{\ln n}} + \cancel{\gamma} + \varepsilon_{2n} - [\cancel{\ln n} + \cancel{\gamma} + \varepsilon_n]\big) = \lim_{n\to\infty}(\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = \ln 2$$

Ejemplo 2. Calcula $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$.

Ahora los denominadores son los números naturales consecutivos desde $n+1$ hasta n^2, por lo que el paréntesis se puede escribir como diferencia de H_{n^2} y H_n. Resulta:

$$L = \lim_{n\to\infty}(H_{n^2} - H_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\ln n^2 + \gamma + \varepsilon'_n - [\ln n + \gamma + \varepsilon_n]\big) = \lim_{n\to\infty}(\ln n + \varepsilon'_n - \varepsilon_n) = \infty$$

Ejercicio 1. Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$ $(L = \ln 3)$.

Ejercicio 2. Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right)$ $(L = \infty)$.

3.8. Métodos de suma de series

En este apartado estudiaremos distintos métodos prácticos para sumar algunas series.

3.8.1. Por descomposición

Aplicamos este método a las series cuyo término general se puede descomponer en suma de otros, que con frecuencia son fracciones simples. Consiste en tomar una suma parcial, descomponer sus términos y, tras simplificar la expresión resultante de S_n, calcular su límite.

a. Series telescópicas.

Son un caso particular de series, en las que a_n se descompone como: $\boxed{a_n = b_n - b_{n+1}}$.
De este modo, S_n se convierte en:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1}) = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cdots + \cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n} + \cancel{b_n} - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

y podemos obtener su límite:

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}}$$

Ejemplo 1. Estudiamos $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$.

En primer lugar vemos que $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, convergente (Riemann, $\alpha > 1$).
Descomponemos el término general, observando que se trata una serie telescópica:

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Simplificamos S_n y calculamos su límite:

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Ejemplo 2. Calculamos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{2n^2 + 2n}}$.
El término general se descompone en

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

luego la serie es telescópica. Operando como en el ejemplo 1, obtenemos $S = 1/\sqrt{2}$.

Nota. Para estudiar la convergencia de la serie del ejemplo 2, podemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador, $\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$, con lo que obtenemos un infinitésimo equivalente a a_n, que corresponde a una serie convergente (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$). Sin embargo, si el enunciado no lo pide y sólo queremos obtener la suma, no es imprescindible estudiar el carácter, pues lo averiguaremos al calcular el límite de S_n.

Ejercicio. Suma: **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+2}{n^2(n+1)^2}$ $(S=2)$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{3n}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{n^2-n}}$ $(S=\sqrt{3})$.

b. Descomposición en fracciones simples.

Si el término general está formado por un cociente de polinomios

$$a_n=\frac{P_k(n)}{Q_l(n)},\quad k<l$$

se descompone en fracciones simples y se simplifica S_n. Veamos ejemplos de dos casos habituales.

Ejemplo 1. Obtenemos la suma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-n}$.

Descomponemos a_n en fracciones e identificamos los coeficientes:

$$a_n=\frac{n-2}{(n-1)\,n\,(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n}+\frac{C}{n+1}\Longrightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=2,\ C=-\frac{3}{2}$$

Observamos que los coeficientes suman 0 pues, al ser el grado del numerador igual a 1, es nulo el coeficiente de n^2, es decir $A+B+C$.

Calculamos ahora S_n, descomponiendo la suma de los a_i en tres sumas distintas y recordando que H_n representa la suma de los n primeros términos de la serie armónica:

$$S_n=\sum_{i=2}^{n}\left(-\frac{1/2}{i-1}+\frac{2}{i}-\frac{3/2}{i+1}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1}+2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i+1}=$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{+}\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$-\frac{1}{2}\left(\cancel{H_n}-\frac{1}{n}\right)+2\left(\cancel{H_n}-1\right)-\frac{3}{2}\left(\cancel{H_n}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2n}-2+\frac{9}{4}-\frac{3/2}{n+1}$$

Tomando límites, obtenemos $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$.

Ejemplo 2. Calculamos $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Descomponemos a_n, separando en dos partes los tres términos resultantes:

$$a_n=\frac{1}{n^2(n-1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{n-1}=\cdots=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n-1}=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^2}$$

Calculamos S_n y tomamos límites:

$$S_n=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-1\right)=$$
$$1-\frac{1}{n}+1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\Longrightarrow S=\lim_{n\to\infty}S_n=2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=2-\frac{\pi^2}{6}$$

Ejercicio. Suma: **a)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n^3-n}$ $(S=5/4)$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$ $(S=\frac{\pi^2}{6}-1)$.

3.8.2. A partir de la armónica

La serie armónica es divergente, pero a partir de ella podemos sumar distintas series de términos positivos y negativos. Para ello utilizamos la suma de sus n primeros términos, cuyo valor (apdo. **3.7.4**) es:

$$\boxed{H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n}$$

Entonces la suma de los $2n$ primeros términos, H_{2n}, será:

$$H_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}$$

Llamamos P_n a la suma de los n primeros inversos de los pares:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}H_n \Longrightarrow \boxed{P_n = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon'_n}$$

I_n es la suma de los n primeros inversos de los impares. Para calcular su valor, tomamos los $2n$ primeros términos de la armónica y eliminamos los n primeros inversos de los pares (P_n):

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = H_{2n} - P_n = \ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \left[\frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon'_n\right] =$$

$$\ln 2 + (\ln n + \gamma) + \varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - \varepsilon'_n \Longrightarrow \boxed{I_n = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon''_n}$$

Así pues, tanto H_n como I_n y P_n son divergentes. Obsérvese que el subíndice indica número de términos, mientras que el tipo (inversos de naturales, impares, pares) viene dada por H, I o P.

Ejemplo 1. Hallamos la suma de la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Tomamos $2n$ términos de la serie, de los que n serán de I_n y los otros n de P_n:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$I_n - P_n = \ln 2 + \cancel{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma)} + \varepsilon''_n - \cancel{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma)} - \varepsilon'_n \Longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$$

Ejemplo 2. Calculamos la suma de $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$

Vemos que los términos siguen una cierta ley, que se repite de tres en tres. Entonces tomamos $3n$ términos, es decir, n grupos de 3. En cada uno hay un inverso de impar (+) y dos inversos de pares (−), por lo que en total habrá n impares consecutivos y $2n$ pares, consecutivos también. Así pues:

$$S_{3n} = I_n - P_{2n} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(\ln 2n + \gamma) - \varepsilon_2 \Longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Ejercicio. Suma: $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{6}+\cdots \quad (S=\dfrac{3}{2}\ln 2)$.

3.8.3. A partir del desarrollo en serie de la exponencial de x

La suma de $\sum \dfrac{P_k(n)}{n!}\,\alpha^n$, donde $P_k(n)$ es un polinomio de grado k y $\alpha\in\mathbb{R}$, se calcula a partir del desarrollo en serie de e^x

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

que se estudiará en el tema siguiente y aquí suponemos conocido.

Carácter. El parámetro α puede ser negativo, por lo que estudiamos $|a_n|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P_k(n+1)\,\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{P_k(n)\,\alpha^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{P_k(n+1)}{P_k(n)}\frac{\alpha}{n+1}\right|=0<1$$

luego $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ la convergencia es absoluta, por lo tanto incondicional (véase **3.7.3**).

Suma. Para simplificar numerador y denominador, escribimos $P_k(n)$ como

$$P_k(n)=A_0+A_1\,n+A_2\,n(n-1)+\cdots+A_k\,n(n-1)\cdots\big[n-(k-1)\big]$$

cuyo último sumando -con k factores- tiene grado k. A continuación descomponemos el término general en $k+1$ sumandos, con lo que la serie se convierte en una combinación lineal de series convergentes, que sumaremos utilizando el desarrollo de la función e^x.
En el caso de que el denominador no sea el factorial de n, sino el de $n\pm p$, el polinomio $P_k(n)$ se descompondrá en una combinación lineal de productos de factores decrecientes a partir de $n\pm p$.

Ejemplo. Hallamos la suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n!}\,2^n$.
Descomponemos $P_2(n)$: $2n^2+n+1=A+Bn+Cn(n-1)\Longrightarrow A=1,\ B=3,\ C=2$. Entonces:

$$a_n=\frac{1+3n+2n(n-1)}{n!}\,2^n=\frac{1}{n!}\,2^n+\frac{3n}{n!}\,2^n+\frac{2n(n-1)}{n!}\,2^n$$

con lo que

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}+3\sum_{i=0}^{n}\frac{i\,2^i}{i!}+2\sum_{i=0}^{n}\frac{i(i-1)\,2^i}{i!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}+3\sum_{i=1}^{n}\frac{i\,2^i}{i!}+2\sum_{i=2}^{n}\frac{i(i-1)\,2^i}{i!}$$

(los sumandos de numerador nulo se han eliminado en el segundo y tercer sumatorios).
Simplificamos los factores del numerador con los factoriales del denominador; y sacamos fuera del sumatorio los factores necesarios para que el exponente del 2 coincida con la expresión del factorial. Queda:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}+3\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i-1}}{(i-1)!}+2\cdot 2^2\sum_{i=2}^{n}\frac{2^{i-2}}{(i-2)!}$$

donde los tres sumatorios contienen los mismos términos, $\dfrac{2^0}{0!}+\dfrac{2^1}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\cdots$, y tienden a e^2. Así pues,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{i-1}}{(i-1)!}+8\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{i-2}}{(i-2)!}=e^2+6\,e^2+8\,e^2=15\,e^2$$

Ejercicio. Calcula **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n!}$ $(S=4e-1)$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+1}{(n+2)!}3^n$ $(S=e^3-2)$

3.8.4. Series hipergeométricas

Definición. Una serie es hipergeométrica si su término general cumple la condición:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha\,n+\beta}{\alpha\,n+\gamma}}\ (\alpha>0,\gamma\neq 0)$$

Carácter. Teniendo en cuenta la condición de serie hipergeométrica, está claro que tenemos un caso dudoso por el criterio del cociente. Así pues, aplicamos el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\alpha\,n+\beta}{\alpha\,n+\gamma}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha\,n+\gamma}\right)=\frac{\gamma-\beta}{\alpha}$$

- Si $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}>1\Longrightarrow\boxed{\alpha+\beta<\gamma}$, la serie es convergente.
- Si $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}<1\Longrightarrow\boxed{\alpha+\beta>\gamma}$, la serie es divergente.
- Si $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}=1\Longrightarrow\boxed{\alpha+\beta=\gamma}$, tenemos un caso dudoso (se demuestra que diverge).

Suma. Para calcular la suma, en el caso $\alpha+\beta<\gamma$, se parte de la condición de hipergeométrica

$$\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{\alpha\,i+\beta}{\alpha\,i+\gamma}\Longrightarrow a_{i+1}\,(\alpha\,i+\gamma)=a_i\,(\alpha\,i+\beta)\ \forall i\in\mathbb{N}$$

Dando valores a i, sumando, simplificando y tomando límites, se llega a

$$\boxed{S=\frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)}}$$

Ejemplo. Queremos obtener la suma de la serie siguiente, cuyo carácter se estudió en **3.6.6**.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$$

Vemos que es hipergeométrica calculando

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\cdots=\frac{a+n+1}{b+n+1}=\frac{n+a+1}{n+b+1}\Longrightarrow\alpha=1,\ \beta=a+1,\ \gamma=b+1$$

Como acabamos de ver, esta serie será convergente si $\gamma>\alpha+\beta\Longleftrightarrow b>a+1$. Entonces obtenemos a_1 y sustituímos en la fórmula de la suma:

$$a_1=\frac{a\,(a+1)}{b\,(b+1)}\Longrightarrow S=\frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)}=\frac{a\,(a+1)}{b\,(b+1)}\,\frac{b+1}{b+1-(a+2)}=\frac{a\,(a+1)}{b\,(b-a-1)}$$

Ejercicio. Calcula las sumas de las siguientes series, comprobando que son hipergeométricas (pueden resolverse también como telescópicas).

$$\textbf{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+2)}\quad\left(S=\frac{1}{4}\right)\ ;\quad\textbf{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\quad\left(S=\frac{1}{2}\right)$$

3.8.5. Carácter y suma de series. Resumen

Se resumen a continuación los principales pasos que conviene dar en el estudio de una serie.

Series de términos positivos. Si se trata de una S.T.P., aplicamos alguno de los criterios estudiados, teniendo en cuenta su mayor o menor adecuación al tipo de serie de que se trate. Para sumarla, si converge, podemos reordenar sus términos, agruparlos o descomponerlos en suma de términos positivos, pues no cambia la suma (propiedades **3**, **6** y **7** de las series).

Series de términos positivos y negativos. Si la serie tiene infinitos términos de cada signo, el primer paso será estudiar la serie $\sum |a_n|$, con lo que obtenemos dos posibles resultados:

a) **Convergente**. En este caso será incondicionalmente convergente (T. de Dirichlet), lo que nos permite reordenar o agrupar sus términos, p. ej. separando positivos de negativos.

b) **Divergente**. Si sólo diverge una de las dos subseries (S_n^+ o S_n^-), la serie diverge incondicionalmente a $\pm\infty$ (apdo. **3.7.1**). Si divergen ambas, distinguimos dos casos:

b.1. Si se trata de una alternada, aplicamos el teorema de Leibnitz.

b.2. De lo contrario, recurrimos al método general: tomamos una suma parcial S_n (donde podemos agrupar, simplificar, etc.) y estudiamos su límite.

Nota. En estos dos casos, si existe convergencia, es condicional (se cumple para la ordenación de términos dada, pero puede no verificarse para otras).

Caso particular. Series convergentes que se descomponen en S.T.P.N. En ocasiones, para sumar una serie absolutamente convergente, descomponemos su término general a_n en sumas o diferencias de términos ($b_n \pm c_n \pm \dots$). Al hacer esto (descomposición en términos positivos y negativos), la serie resultante ya no tiene por qué ser absolutamente convergente y tenemos dos posibilidades.

1) Si los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponden a **series convergentes**, aplicamos la propiedad **5** (*la c.l. de series convergentes converge a la c.l. de las sumas de las series*). Como la serie $\sum a_n$ es combinación lineal de $\sum b_n, \sum c_n \dots$, su suma valdrá $S = S_b \pm S_c \pm \dots$, siendo $S_b, S_c, \dots$ las sumas de $\sum b_n, \sum c_n, \dots$, respectivamente.

2) Si **dos o más** de los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponden a **series divergentes**, debemos analizar S_n, aplicando alguno de los métodos estudiados: telescópicas, descomposición en fracciones, series I_n y P_n, etc. En cualquier caso, no podemos sumar por separado las distintas subseries $\sum b_n$, $\sum c_n, \dots$.

Pueden verse ejemplos de estos dos tipos de descomposición en el documento de apoyo **6.10**.

Ejemplo. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ es de términos positivos y converge por comparación con $\sum \dfrac{1}{n^2}$.
Para sumarla, descomponemos a_n:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Obtenemos así la diferencia de términos generales de series divergentes, por lo que no podemos sumarlas por separado. Puede calcularse la suma como telescópica o utilizando H_n (**3.8.1**).

Ejercicio. Hemos distinguido las posibilidades: **1)** todas convergentes y **2)** dos o mas divergentes. ¿Puede ocurrir que sólo uno de los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponda a una serie divergente?

3.9. Ejercicios de autoevaluación

3.9.1. Test verdadero/falso

Test 1. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ es una suma parcial de $\sum a_n$. La serie diverge si y sólo si $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$.
2. Una serie geométrica converge siempre que la razón sea menor que 1.
3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie es divergente.
4. En una serie de términos positivos podemos agrupar términos sin que varíe el carácter.
5. Si una serie converge, la suma de un número cualquiera de términos consecutivos, a partir de uno dado p, tiende a cero si $p \to \infty$.
6. Si una serie no tiene términos negativos, sólo puede converger o diverger.
7. Decimos que $\sum a_n$ es minorante de $\sum b_n$ si y sólo si $a_n < b_n$, $\forall n$.
8. La serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$ cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, por lo que converge.
9. La serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ es convergente, pues el exponente de n es $\alpha = 2 > 1$.
10. La serie $\sum 3^n/n^3$ cumple la condición necesaria de convergencia, pero resulta divergente por el criterio de la raíz.
11. Si existe el límite del criterio del cociente existe el de la raíz n-ésima y coinciden.
12. Si el criterio de D'Alembert no soluciona el carácter de una serie, no tiene sentido aplicar el de Raabe y es preferible, en general, usar el de Cauchy.
13. Para conocer el carácter de $\sum \dfrac{1}{e^{2\ln n}}$ es necesario aplicar el criterio logarítmico.
14. Según el criterio de condensación, las series $\sum a_n$ y $\sum 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.
15. Averigua el carácter de las series siguientes:
    - 15.1. $\sum \dfrac{1}{\alpha^n}$, $\alpha > 1$
    - 15.2. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$
    - 15.3. $\sum \dfrac{1}{\ln n}$
    - 15.4. $\sum \dfrac{1}{n + \ln n}$
    - 15.5. $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}}$
    - 15.6. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

Test 2. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sea la serie $\sum a_n$. Sea la suma parcial $S_n = \sum_1^n a_i = \sum_1^n \left|a_i^+\right| - \sum_1^n \left|a_i^-\right| = S_n^+ - S_n^-$. $\sum a_n$ converge incondicionalmente si y sólo si convergen S_n^+ y S_n^-.
2. Si $\sum a_n$ es absolutamente divergente, entonces es incondicionalmente divergente.
3. La serie $\sum(-1)^{n+1}/\ln n$, $n > 1$ es absolutamente divergente, luego no podemos asegurar nada de su carácter.
4. Las series de término general $\dfrac{P_k(n)}{Q_k(n)}$ son convergentes y pueden sumarse por descomposición en fracciones simples.
5. Para sumar $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{6}\ldots$, calcularemos el límite de la suma parcial de $4n$ términos, que resulta igual al de $I_{3n} - P_n$.
6. Para sumar $\sum \dfrac{P_3(n)}{(n+3)!}$, hemos de realizar la descomposición:

$$P_3(n) = A + B(n+3) + C(n+3)(n+2) + D(n+3)(n+2)(n+1)$$

7. Averigua razonadamente el carácter de las series siguientes y, si es posible, su suma:
   7.1. $\sum \dfrac{-1}{n}$
   7.2. $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
   7.3. $-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{12}-\ldots$
   7.4. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}-\ldots$

3.9.2. Cuestión

Sea la serie $\sum a_n$ de términos positivos. ¿Qué sabemos –y por qué– de su carácter (convergente, divergente, oscilante, condicional, incondicional)?

3.9.3. Solución de los test verdadero/falso

Test 1.

1. **F**. La serie diverge si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \infty$.
2. **F**. Una serie geométrica converge si el **valor absoluto** de la razón es menor que 1.
3. **F**. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie no converge, luego puede ser divergente u oscilante.
4. **V**. Propiedad 7 de las series.
5. **V**. Criterio de convergencia de Cauchy.
6. **V**. Las series de términos positivos nunca oscilan.
7. **F**. Decimos que $\sum a_n$ es minorante de $\sum b_n$ si y sólo si $a_n < b_n$, $\boxed{\forall n \geq n_1}$.

8. **F**. La condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria para la convergencia, no suficiente.

9. **F**. La condición $\alpha > 1$ es para la serie de Riemann. En este caso, $a_n \sim 1/n$, por lo que la serie tiene el mismo carácter que la armónica, luego diverge.

10. **F**. La serie $\sum 3^n/n^3$ no cumple la condición necesaria de convergencia pues $a_n \to \infty$. Sí es cierto que resulta divergente por el criterio de la raíz.

11. **V**. A partir de la regla de la raíz.

12. **F**. El criterio de D'Alambert es especialmente adecuado para solucionar casos que resultan dudosos por el criterio del cociente.

13. **F**. Basta ver que $a_n = \dfrac{1}{e^{\ln(n^2)}} = \dfrac{1}{n^2}$ (serie de Riemann, $\alpha = 2 > 1$, convergente).

14. **F**. **Si $\{a_n\}$ es monótona decreciente**, las series $\sum a_n$ y $\sum 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

15. Averigua el carácter de las series siguientes:

    15.1. $\sum \dfrac{1}{\alpha^n}$, $\alpha > 1$: **C**, serie geométrica de razón $\dfrac{1}{\alpha} < 1$.

    15.2. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$: **C**, serie de Riemann, $\alpha > 1$.

    15.3. $\sum \dfrac{1}{\ln n}$: **D**, mayorante de la armónica.

    15.4. $\sum \dfrac{1}{n + \ln n}$: **D**, $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, mismo carácter que la armónica.

    15.5. $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}}$: **C**, por el criterio logarítmico.

    15.6. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2^n}} = \sum \dfrac{1}{2^{n/2}} = \sum \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$: **C**, por el criterio de la raíz.

Test 2.

1. **V**. Véase apdo. **3.7.1**.

2. **F**. Por ejemplo, la armónica alternada $\sum (-1)^{n+1}/n$ es absolutamente divergente. Pero converge (condicionalmente) a $\ln 2$. En cambio, se demuestra a partir del teorema de Dirichlet que, si una serie es incondicionalmente divergente, es absolutamente divergente.

3. **F**. Es alternada, de términos decrecientes en valor absoluto y $a_n \to 0$. El teorema de Leibnitz asegura que converge en el orden dado, es decir, condicionalmente.

4. **F**. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, el término general no tiende a cero, luego la serie no converge.

5. **V**. Tomaremos una suma parcial de 4n términos, es decir n grupos de 4. En cada uno habrá 3 positivos (inversos de impares) y uno negativo (inverso de par), por lo que en S_{4n} habrá $3n$ positivos (inversos de los impares) y n negativos (inverso de los pares). Se cumplirá: $S_{4n} = I_{3n} - P_n$ y, simplificando y tomando límites, obtendremos el valor $S = \ln(2\sqrt{3})$.

6. **V**. Véase el apdo. **3.8.3**.

7. Carácter y suma (en su caso) de las series siguientes, justificándolo brevemente:

7.1. $\sum \dfrac{-1}{n}$: se trata de la armónica cambiada de signo, por lo que diverge a $-\infty$.

7.2. $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$: Es telescópica, pues $a_n = b_n - b_{n+1}$. Estudiamos S_n:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

La serie converge condicionalmente (en el orden dado en el enunciado).

7.3. $-1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{12} - \ldots$

Tomamos una suma parcial de $3n$ términos. En cada grupo de tres, habrá uno negativo y dos positivos. Los denominadores de los negativos son los impares consecutivos, mientras que los de los positivos son los pares consecutivos.

Entonces en S_{3n} habrá n inversos de impares, negativos, y $2n$ inversos de pares, positivos. Se cumplirá: $S_{3n} = -I_n + P_{2n}$ y obtendremos para la suma $S = -\ln\sqrt{2}$.

7.4. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} \ldots$: Se trata de una serie geométrica de razón $r = -1/3$, $|r| < 1$, por lo que es convergente. Su suma vale $S = \dfrac{a_1}{1-r} = 3/4$.

3.9.4. Solución de la cuestión

Si $\sum a_n$ es de términos positivos ($a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$), la sucesión de sumas parciales

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ \ldots\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n;\ \ldots$$

verifica

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots$$

es decir, será monótona creciente. Si está acotada, la serie será **convergente** (toda sucesión monótona creciente, acotada superiormente, converge). De lo contrario, será **divergente** a $+\infty$. Es decir, una serie de términos positivos nunca es oscilante.

La propiedad 6 de las series dice que "si alteramos el orden de los términos de una serie de términos positivos no varía el carácter, ni la suma si es convergente". Esto significa que el carácter de las series de términos positivos es siempre **incondicional**.

Podemos pues afirmar que la serie $\sum a_n$ sólo puede ser incondicionalmente convergente o incondicionalmente divergente.

Tema 4

Sucesiones y series funcionales

4.1. Sucesiones funcionales

4.1.1. Introdución. Distancia entre funciones

El objetivo principal del tema es estudiar el desarrollo de una función en serie de Taylor. Para ello, definiremos en general las sucesiones y series de funciones, enunciaremos algunas de sus propiedades y particularizaremos para el caso de las series de potencias, aplicándoles las propiedades vistas anteriormente. Comenzamos definiendo la distancia entre funciones.

Definición. Llamamos $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$ al conjunto de funciones reales acotadas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dadas $f, g \in \mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$, la **distancia** entre ellas se define como:

$$\boxed{d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)|\,,\ x \in I}$$

es decir, el supremo de las distancias punto a punto entre f y g, cuando x toma valores en I. Con esta definición de distancia, se comprueba que $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$ es espacio métrico.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ cumplen:

$$|f(x) - g(x)| = \frac{3}{1+x^2} \Longrightarrow d(f,g) = \sup \left.\frac{3}{1+x^2}\right|_{x\in\mathbb{R}} = 3$$

Este valor se alcanza en $x = 0$, por lo que representa el valor máximo, además de supremo.

Nota. El supremo no tiene por qué ser alcanzado. P. ej., si en f y g se multiplican los numeradores por x^2, la distancia entre ambas sigue siendo 3, pero el supremo corresponde a $x \to \infty$.

Ejercicio. Calcula la distancia entre $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ $\left(d = 5 \cdot 6^{-6/5}\right)$.

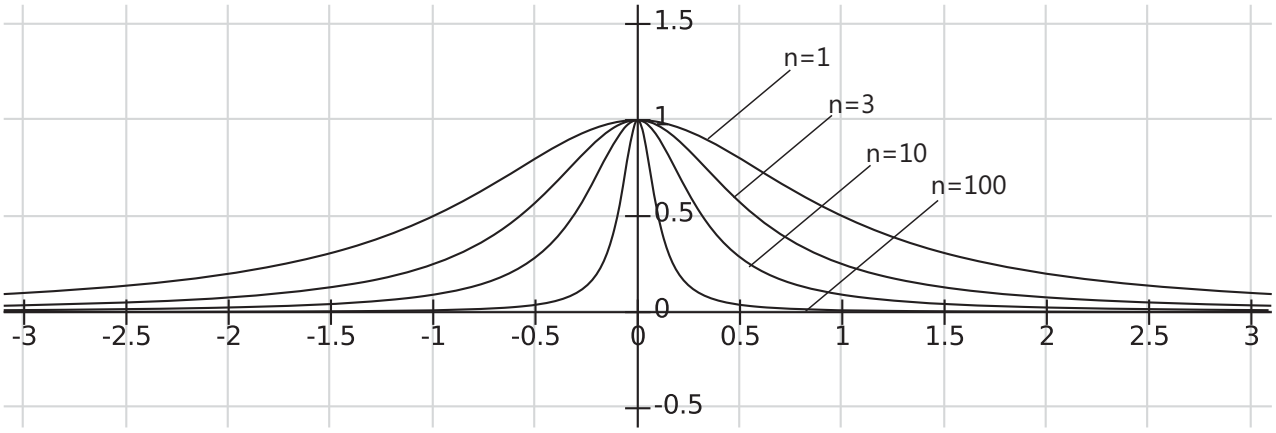
4.1.2. Sucesión funcional

Es una sucesión cuyos términos son funciones reales definidas en un intervalo $I \in \mathbb{R}$:

$$\{f_n\} = f_1, f_2, \ldots f_n \ldots, \quad f_n \in \mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$$

Ejemplo. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2} \Longrightarrow \{f_n\} = \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{1+2x^2}, \dfrac{1}{1+3x^2} \cdots \dfrac{1}{1+nx^2} \cdots$

Se muestran en la figura las curvas correspondientes a distintos valores de n. Obsérvese que todas ellas pasan por el punto $(0,1)$ y, para todo x no nulo, se aproximan a OX al crecer n.



4.1.3. Convergencia simple o puntual

Si fijamos un $x \in I$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ que resulta es una sucesión numérica. Su límite, si existe, será función del x fijado. A partir de lo estudiado en sucesiones numéricas, decimos que la sucesión tiene límite $f(x)$ si se cumple:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall m \geq n}$$

es decir si, a partir de un índice suficientemente avanzado, los términos de la sucesión se aproximan tanto como queramos al valor $f(x)$.

Si esto ocurre $\forall x \in I$, decimos que la sucesión funcional $\{f_n\}$ converge simple o puntualmente a la función f en I.

En el ejemplo anterior, todas las curvas pasan por el punto $(0, 1)$, mientras que, fuera del origen, se acercan tanto como queramos al eje OX, si n es suficientemente alto. Entonces resulta:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

y obtenemos una función límite discontinua en el origen.

El conjunto $\mathcal{C}$ de puntos en los que $\{f_n\}$ converge se llama **Campo de Convergencia**.

Ejercicio. Estudia la sucesión funcional $\{\text{sen}^n x\}$, $x \in [0, \pi/2]$, comprobando que su función límite es similar a la que acabamos de obtener.

4.1.4. Convergencia uniforme

En la convergencia simple que acabamos de ver se exige que, para todo $\varepsilon > 0$ exista un índice n tal que, a partir de él, la diferencia $|f_m(x) - f(x)|$ se haga menor que ε. Como es lógico, el valor de n dependerá de ε, pero puede depender también del punto x elegido, es decir:

$$n = n(\varepsilon, x) \quad \text{(convergencia simple)}$$

Lo anterior permite que los n obtenidos puedan ser muy distintos para los distintos puntos x y, como consecuencia, que la función límite f pueda ser muy diferente de las f_n (en el ejemplo, las f_n son continuas y f no lo es).

Si, dado un ε, podemos encontrar un valor máximo n_0 para los distintos $n(\varepsilon, x)$, entonces:

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall m \geq n_0, \ \forall x \in I$$

y a partir de un único n_0 se cumple la condición de convergencia para todo x, lo que nos permite independizarnos del punto pues el índice n depende ahora sólo de ε. En este caso se dice que la convergencia es uniforme y algunas propiedades de las funciones f_n se transmiten a f.

Definición. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $I \in \mathbb{R}$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n\,(\varepsilon) \,/\, d(f_m, f) < \varepsilon, \; \forall m \geq n$$

Lo anterior equivale a decir:

$$\boxed{f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ en } I \iff \lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0}$$

La convergencia uniforme supone la simple, puesto que la primera cumple las mismas condiciones que la segunda, más alguna condición adicional.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de $f_n = \dfrac{x}{1+nx}$, $x \in [1,2]$ en tres pasos. Primero calculamos el límite $f(x)$ para un $x \in I$ dado. A continuación obtenemos la distancia entre las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$. Por último, calculamos el límite de esta distancia cuando $n \to \infty$.

1. Dado $x \in [1,2]$, el numerador es un número real y el denominador tiende a infinito, luego $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y f_n converge simplemente a $f(x) = 0$.
2. $d(f_n, f) = \sup \left| \dfrac{x}{1+nx} - 0 \right|_{x\in I} = \sup \left| \dfrac{1}{1/x+n} \right|_{x\in I} = \dfrac{1}{1/2+n}\,.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1/2+n} = 0$, luego la convergencia es uniforme.

Ejercicio. Comprueba que convergen uniformemente las sucesiones de término general:

$$\textbf{a)}\; f_n(x) = \frac{1}{2n-\sqrt{x}},\; x \in [1,2]; \qquad \textbf{b)}\; f_n(x) = \frac{\cos x^2}{n^2},\; x \in \mathbb{R}$$

4.1.5. Sucesión de funciones continuas

Sea una sucesión de funciones f_n, definidas en I. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I y las f_n son continuas en I, entonces f es continua en I. Es decir:

$$\boxed{f_n \text{ continuas } + \text{ convergencia uniforme } \Longrightarrow f \text{ continua}}$$

La demostración puede verse en el documento de apoyo **6.11**.

Aplicación. Dada una sucesión $\{f_n\}$, suele ser sencillo encontrar su función límite $f(x)$ y averiguar si las f_n y la f son continuas. Más complicado resulta analizar si la convergencia es uniforme. El teorema enunciado resuelve el estudio en muchos casos, pues, si una sucesión de funciones continuas converge a una función límite discontinua, la convergencia no será uniforme. Si lo fuera, $f(x)$ sería continua, cosa que no ocurre.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia simple y uniforme de la sucesión $\{x^n\}$, en $I = [0,1]$. De modo similar a lo que ocurría en el ejemplo de **4.1.2**, para $x = 1$ se cumple $x^n = 1, \forall n$. Y, si $x \in [0,1)$, $x^n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Entonces la función límite $f(x)$ vale 1 para $x = 1$ y 0 para $x \in [0,1)$, luego es discontinua. Como las funciones f_n son continuas $\forall n$, podemos asegurar que la convergencia no es uniforme.

Ejercicio. Estudia la convergencia de las sucesiones funcionales:

$$\textbf{a)}\; \{\cos^n x\}\,,\; x \in [0, \pi/2]; \qquad \textbf{b)}\; \left\{ e^{-nx^2} \right\},\; x \in \mathbb{R}$$

4.2. Series funcionales

4.2.1. Definición

Dada una sucesión $\{f_n\}$, definimos la suma parcial n-ésima F_n como:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

A la sucesión de sumas parciales $\{F_n\}$, la llamamos **serie funcional asociada a** $\{f_n\}$. La serie se denota $\sum f_n$. Los sumandos f_i son los términos de la serie y f_n es el término general.

Ejemplo. Si $f_n = \operatorname{sen} \dfrac{x}{n}$, la serie asociada a $\{f_n\}$ será $\sum \operatorname{sen} \dfrac{x}{n}$ y la suma parcial n-ésima:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{x}{i} = \operatorname{sen} \frac{x}{1} + \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{x}{n}$$

4.2.2. Convergencia simple y uniforme

Sea una serie funcional $\sum f_n$. Razonando como en **4.1.3**, si fijamos un $x \in I$, resulta una serie numérica. Si converge, su suma será función del x elegido.

Convergencia simple. Decimos que la suma de la serie es $F(x)$, si los términos $F_n(x)$ de la sucesión de sumas parciales se aproximan al valor $F(x)$ tanto como queramos.
Si esto se cumple para cada $x \in I$, entonces la serie $\sum f_n$ converge simplemente a la función F en I. La condición es:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, |F_m(x) - F(x)| < \varepsilon, \ \forall m \geq n}$$

En este caso escribimos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x) \quad \big(F(x) \text{ es la función suma}\big)$$

Ejemplo. Un caso muy sencillo de serie funcional es la serie geométrica de razón x:

$$x + x^2 + \ldots x^n + \ldots$$

Esta serie converge si $|x| < 1$ y su suma vale $S = x/(1-x)$ (véase **3.2**).

Convergencia uniforme. Como vimos en sucesiones funcionales, la convergencia será uniforme si $n = n(\varepsilon)$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n\,(\varepsilon) \,/\, d(F_m, F) < \varepsilon, \ \forall m \geq n$$

O, lo que es lo mismo,

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformemente a } F \text{ en } I \iff \lim_{n\to\infty} d(F_n, F) = 0}$$

siendo la distancia entre F_n y F el supremo de las distancias punto a punto, cuando $x \in I$.
El estudio de la convergencia uniforme de una serie resulta más complicado que el de una sucesión; pues F_n es la suma parcial de los términos de la sucesión. Por ello resulta de gran utilidad el criterio de la mayorante, que enunciamos a continuación.

4.2.3. Criterio de la mayorante (Weierstrass)

Sea $\sum f_n$, definida en $I \in \mathbb{R}$. Si la serie $\sum |f_n(x)|$ tiene en I una mayorante numérica de términos positivos, convergente, $\sum f_n$ es uniformemente convergente en I.

Ejemplo. La serie $\sum \dfrac{1}{n^2}(\operatorname{sen} nx + \cos nx)$ cumple $|f_n(x)| \leq \dfrac{2}{n^2}$, $\forall n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $\sum |f_n|$ es minorante de una serie numérica convergente, luego converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio. Comprueba la convergencia uniforme, en sus intervalos de definición, de las series:

$$\textbf{a)}\ \sum \frac{x^n}{3^n},\ x \in [0,2]; \qquad \textbf{b)}\ \sum \frac{(1-\operatorname{tg} x)^n}{n^3},\ x \in [0,\pi/4]$$

4.2.4. Serie de funciones continuas

Sea $I = [a,b]$. Si una serie $\sum f_n$, de funciones continuas en I, converge uniformemente en I a su función suma F, esta es continua en I.

Demostración. Sabemos (apdo. **4.1.5**) que si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente a su función límite f, esta es continua.
Entonces, si las f_n son continuas en I, la suma parcial $F_n = \sum_1^n f_i$ será también continua en I, por ser suma de funciones continuas.
Como F_n converge uniformemente en I a su función suma F, esta es continua en I.

4.2.5. Integración de una serie de funciones

Nuestro principal interés en la integración y derivación de las series de funciones (apdos. **4.2.5** y **4.2.6**) está en que se utilizarán más adelante en el caso particular de las series de potencias. Aquí nos limitaremos a enunciar las condiciones para realizar ambas operaciones y las propiedades que cumplen (demostración en J. Burgos, p. 541).

Sea $I = [a,b]$. Si una serie $\sum f_n$, de funciones integrables en I, converge uniformemente en I a su función suma F, esta es integrable en I y su integral es la suma de la serie de integrales.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \Longrightarrow \int_a^x F(t)dt \overset{\text{c.u.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)dt, \quad x \in [a,b]}$$

Esto puede expresarse abreviadamente diciendo que *si una serie de funciones integrables converge uniformemente a F, la integral de la suma es la suma de la serie de integrales.*

4.2.6. Derivación de una serie de funciones

Sea $I = [a,b]$. *Sea una serie $\sum f_n$, de funciones derivables en I, que converge en un punto de I, tal que $\sum f_n'$ converge uniformemente en I. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I a su función suma F, que es derivable en I y su derivada es la suma de la serie de derivadas.*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = F(x_0) \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{\text{c.u.}}{=} G(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \ \text{ y } \ F'(x) = G(x)}$$

Podemos expresarlo abreviadamente diciendo que, en ciertas condiciones, *la derivada de la suma de una serie de funciones derivables es la suma de la serie de las derivadas.*

4.3. Series de potencias

4.3.1. Definición

Una serie de potencias es un caso particular de serie funcional, en el que $f_n(x)$ toma la forma:

$$f_n(x) = a_n(x-a)^n,\ a_n \in \mathbb{R}$$

Habitualmente se elige $a = 0$. Asimismo, es frecuente incluir el término correspondiente a $n = 0$, por lo que la forma habitual de las series de potencias es:

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

4.3.2. Teorema de Cauchy-Hadamard

Para toda serie de potencias $\exists\, r \,/\, 0 \le r \le \infty$ *(radio de convergencia) tal que:*

- *Si* $|x| < r$*, la serie es absolutamente convergente.*
- *Si* $|x| > r$*, la serie no es convergente.*

Demostración. Como vimos en series numéricas (**3.7.3**), la convergencia absoluta es equivalente a la incondicional, por lo que aplicamos el criterio de la raíz n-ésima a la serie $\sum |a_n x^n|$ (que se convierte en una serie numérica para cada $x \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = l\,|x|$$

a) Si $l \neq 0$ y $l \neq \infty$, estudiamos dos opciones:

a.1) Si $|x| < \dfrac{1}{l} \Longrightarrow l\,|x| < 1 \Longrightarrow \sum |a_n x^n|$ convergente.

Entonces la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente.

a.2) Si $|x| > \dfrac{1}{l} \Longrightarrow l\,|x| > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$.

Que el límite sea mayor que 1, significa que:

$$\exists n_0 \,/\, \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1\ \forall n \ge n_0 \Longrightarrow |a_n x^n| > 1\ \forall n \ge n_0$$

luego no se cumple la condición necesaria de convergencia y la serie no converge.

b) Si $l = 0$, entonces $l\,|x| = 0 < 1\ \forall x$, por lo que decimos que $r = \infty$.

c) Si $l = \infty$ entonces el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$$

será menor que 1 sólo si $x = 0$, en cuyo caso todos los productos $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$ serán nulos y el límite también lo será. Decimos entonces que $r = 0$.

Así pues, hemos hallado un valor r que cumple la condición del enunciado, con lo que queda demostrado el teorema. Si $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, este valor de r es:

$$\boxed{\textbf{a)}\ r = 0,\ \text{si } l = \infty\,;\quad \textbf{b)}\ r = \infty,\ \text{si } l = 0\,;\quad \textbf{c)}\ r = \frac{1}{l},\ \text{si } l \neq 0,\ l \neq \infty}$$

Nota.

1. Para $|x| = r$, el teorema no afirma nada, por lo que la serie puede ser convergente o no y **hemos de estudiar la serie numérica que resulta para** $x = \pm r$.
2. Podemos también calcular l como límite del cociente
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$
pues, si existe este, existe el de la raíz n-ésima y vale lo mismo (regla de la raiz).

Límite de oscilación. En la demostración del teorema hemos llamado l al límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$. Pero sabemos que no toda sucesión tiene límite. Por ello estudiamos el concepto de límite de oscilación.

Se dice que una sucesión $\{\alpha_n\}$ tiene un límite de oscilación α, finito o infinito, si existe alguna subsucesión de $\{\alpha_n\}$ que tiene límite α (o, lo que es equivalente, si en todo entorno de α hay infinitos elementos de $\{\alpha_n\}$). Esto puede ocurrir, por ejemplo, si α_n no tiene expresión única, sino que es distinto para términos pares e impares.

Una sucesión de números reales no tiene por qué tener límite, pero sí algún límite de oscilación, finito o infinito (J. Burgos, p. 73). Si además está acotada, sus límites de oscilación serán finitos (teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones). En el caso de obtener distintos valores, tomaremos para l el mayor de ellos, es decir el límite superior de oscilación, con lo que el radio de convergencia obtenido será el menor de los posibles, válido así para toda la serie. Así pues,
$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Formas del campo de convergencia. A partir del teorema, el campo de convergencia $\mathcal{C}$ de las series de potencias toma siempre una de estas cuatro formas:
$$(-r, r),\ (-r, r],\ [-r, r),\ [-r, r]$$

Ejemplos. Calculamos el radio y el campo de convergencia de las siguientes series:

1. $\sum \dfrac{x^n}{n^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Longrightarrow r = \infty$. Luego $\mathcal{C} = \mathbb{R}$.
2. $\sum n^n x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow r = 0$. Luego $\mathcal{C} = \{0\}$.
3. $\sum \dfrac{x^n}{2^n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow r = 2$. Luego $\mathcal{C} = (-2, 2)$, pues:
   a) $\sum \dfrac{2^n}{2^n} = \sum 1$. Para $x = 2$, la serie es divergente.
   b) $\sum \dfrac{(-2)^n}{2^n} = \sum (-1)^n$. Para $x = -2$, la serie es oscilante.

Ejercicios. Comprueba que los campos de convergencia son los indicados:

1. $\sum n! x^n, \quad \mathcal{C} = \{0\}$.
2. $\sum \dfrac{x^n}{n!}, \quad \mathcal{C} = \mathbb{R}$.
3. $2x + 2x^2 + 2^3x^3 + 2^3x^4 + \ldots, \quad \mathcal{C} = (-1/2, 1/2)$.
4. $1 + x + 25x^2 + 3x^3 + 625x^4 + \cdots + a_n x^n + \ldots$, con $\begin{cases} a_n = n, & n \text{ impar} \\ a_n = 5^n, & n \text{ par} \end{cases}$, $\quad \mathcal{C} = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

4.3.3. Continuidad, derivación e integración

Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia $r > 0$, y $S(x)$ su suma. Se cumple:

a) $S(x)$ es continua en todo $x \in (-r, r)$.

b) $S(x)$ es derivable en todo $x \in (-r, r)$ siendo su derivada $\boxed{S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}}$.

c) $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$. Su integral es $\boxed{\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}$.

Es decir:

1. **Las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término**, siendo la derivada de la suma, la suma de las derivadas de los términos; y la integral de la suma, la suma de las integrales de los términos.

   Obsérvese en **c)** que a la derecha de la igualdad tenemos las integrales de los términos, pues estamos integrando $a_n t^n$ entre 0 y x. Por otro lado, la expresión que resulta es primitiva de $a_n x^n$, como vimos al hablar de la función integral (apdo. **1.4.2**).

2. Como se ve en la demostración, al derivar o integrar una serie obtenemos otra del **mismo radio de convergencia**. En cambio, el campo puede variar, pues el intervalo en que derivamos o integramos es abierto, por lo que no podemos asegurar nada para los extremos.

Demostración. Puede verse en el documento de apoyo **6.12**.

Aplicación. Las dos series geométricas siguientes son de gran utilidad para aplicar las propiedades anteriores a la resolución de problemas, como se verá en los ejemplos:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$, cuya suma es $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \ldots$, cuya suma es $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $|x| < 1$.

Ejemplo 1. Calculamos la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$, usando la propiedad **b)**.

Partimos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, de suma $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Para conseguir el factor n en el numerador, derivamos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots \Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \ldots$$

Con el fin de tener también n en el exponente, multiplicamos ambos miembros por x, resultando:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Por último, haciendo $x = 1/2$, nos queda la suma buscada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

Ejemplo 2. Se trata de obtener el radio de convergencia y la función suma $F(x)$ de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Calculamos el radio de convergencia:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Longrightarrow r = \frac{1}{l} = 1$$

Con el fin de eliminar los denominadores, derivamos la serie:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Hemos obtenido una serie geométrica de razón $-x$, cuya suma es:

$$S(x) = \frac{1}{1+x},\ |x| < 1$$

La función $S(x)$ es la suma de las derivadas de los términos de la serie inicial, por lo que será la derivada de la suma $F(x)$ de dicha serie (propiedad **b** de este apartado). Calculando la integral entre 0 y x de $S(t)$ obtendremos la función $F(x)$ buscada. Así pues,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+t)|_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x),\ |x| < 1$$

Nota. Este es un método habitual para resolver este tipo de ejercicios: derivar la serie problema, sumar la serie resultante e integrar la función suma obtenida. O bien al revés: integrar la serie problema, sumar la resultante y derivar la función suma obtenida.

Ejercicio. Calcula la suma de: **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ $(S = 3/2)$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $(S = 6)$.

4.3.4. Teoremas de Abel

Estos teoremas permiten estudiar la suma de una serie en los extremos de su campo de convergencia, $x = \pm r$ (puede verse una demostración en J. Burgos, p. 548).

Sea la serie $\sum a_n x^n$*, de radio de convergencia* $r > 0$.

1. *Si* $\sum a_n x^n$ *converge en* $x = r$ $(x = -r)$*, converge uniformemente en* $[0, r]$ $\big([-r, 0]\big)$.
2. *Si* $\sum a_n x^n$ *converge en* $x = r$ $(x = -r)$*, su suma es una función continua en* $x = r$ $(x = -r)$ *e integrable en* $[0, r]$ $\big([-r, 0]\big)$.

Aplicación. El segundo teorema de Abel permite obtener el valor de la suma de una serie en $x = \pm r$, a partir de su expresión en $(-r, r)$, utilizando la continuidad de la función suma en los extremos de $\mathcal{C}$. En efecto, si $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia r y suma $S(x)$, sabemos que:

- La función suma $S(x)$ es continua en $(-r, r)$, como vimos en **4.3.3. a)**.
- Si $\sum a_n x^n$ converge en $x = r$ $\big(\sum a_n r^n$ es convergente$\big)$, el teorema asegura que $S(x)$ es continua también en $x = r$. Es decir, podemos calcular su valor en $x = r$ tomando límites en la expresión de $S(x)$ para $x \in (-r, r)$ (y análogamente con $x = -r$).

$$\boxed{\sum a_n r^n = S(r) = \lim_{x\to r} S(x)}$$

- Como consecuencia, si la expresión de $S(x)$ para $(-r, r)$ es una función continua en $x = r$, el valor de la suma en $x = r$ corresponderá a dicha expresión, particularizada en ese punto.

Nota. Que la suma tenga una expresión en función de x para $x \in (-r, r)$ y que en $x = r$ la serie converja, no asegura que podamos usar para la suma en el extremo del intervalo la expresión válida para el interior. En efecto, la suma $S(x)$ podría estar definida de distinta forma en $(-r, r)$ y en $x = \pm r$, de modo que la expresión para $(-r, r)$ podría ni siquiera tener sentido en $x = r$.

Ejemplo 1. Estudiamos la convergencia uniforme de la serie $\sum \dfrac{x^n}{n}$.

- Aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard vemos que tiene radio de convergencia $r = 1$, por lo que converge en el intervalo $(-1, 1)$.
- Estudiándola en $x = \pm 1$, vemos que también converge en $x = -1$ (en $x = 1$ diverge).
- Entonces, por el primer teorema de Abel, sabemos que converge uniformemente en el intervalo $[-1, 0]$ y también en todo intervalo $[0, x_0]$, $\forall x_0 < 1$.
- Uniendo ambos intervalos, podemos afirmar que converge uniformemente en todo intervalo

$$[-1, x_0] \subset [-1, 1)$$

Ejemplo 2. Queremos obtener la suma de la serie numérica alternada de los inversos de los impares, como caso particular $(x = 1)$ de la serie de potencias siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \tag{4.1}$$

Para ello, partimos de la serie geométrica de razón $\lambda = -x^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \tag{4.2}$$

Esta serie converge a:

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2},\ |x| < 1$$

Vemos que, integrando la serie (4.2), obtenemos la (4.1). Entonces, teniendo en cuenta **4.3.3. c)**, la suma $S(x)$ de la serie (4.1) será la integral de la suma $s(x)$ de la serie (4.2). Es decir:

$$S(x) = \int_0^x s(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\big|_0^x = \arctan x$$

Al integrar, el radio de convergencia se mantiene, por lo que esta función suma es válida para $|x| < 1$, lo que no nos permite sustituir $x = 1$ en $S(x)$.
Sin embargo, sabemos que la serie (4.1) converge en $x = 1$ (T. de Leibnitz). Entonces, aplicando el segundo teorema de Abel, podemos obtener el valor de la suma en $x = 1$ tomando límites, cuando $x \to 1$, en la función $S(x) = \arctan x$. Al ser continua la función arcotangente, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio. Se pide obtener la suma de la serie alternada de los inversos de los pares, como caso particular de la serie de potencias siguiente, en los extremos de su campo de convergencia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \cdots$$

4.3.5. Desarrollo de una función en serie de potencias. Serie de Taylor

a. Desarrollo en serie de potencias

Sean el intervalo $\mathcal{C} = (-r, r)$, la serie de potencias $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$, y la función f, definida en $\mathcal{C}$. Si la suma de la serie coincide con el valor de la función en $\mathcal{C}$, decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$.

Ejemplo. Sean una serie de potencias y una función, definidas respectivamente como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + \dots \qquad f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

La función existe en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = \pm 1$. Por otra parte, la serie es geométrica de razón x^2, luego converge si $x^2 < 1$ ($\Longleftrightarrow |x| < 1$). Su suma vale:

$$S(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Esta función suma coincide con $f(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$, luego podemos afirmar que $\sum x^{2n+1}$ es un desarrollo en serie de $f(x)$ en $\mathcal{C} = (-1, 1)$.

Nota. Como acabamos de ver, el campo de existencia de la función no tiene por qué coincidir con el de convergencia de la serie. La serie será un desarrollo en serie de la función sólo en los puntos comunes de su campo de convergencia y del dominio de existencia de f.

b. Serie de Taylor

Al estudiar funciones reales, llamábamos desarrollo limitado de Taylor de orden n, de una función suficientemente derivable, a la expresión:

$$f(x) = P_n(x) + T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}\, x^i + T_n(x) \tag{4.3}$$

es decir, la suma del polinomio de Taylor más el término complementario.

Supongamos ahora que una función f admite desarrollo en serie de potencias, con unos ciertos coeficientes a_n:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{en } (-r, r)$$

Al venir expresada como suma de términos de la forma $a_n x^n$, la función será derivable, siendo su derivada la suma de la serie derivada (apdo. **4.3.3**):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} \quad \text{en } (-r, r)$$

También $f', f'' \dots$ serán derivables. Reiterando el proceso, se observa (J. Burgos, p. 510):

- La función f pertenece a C^∞ en $(-r, r)$ (es derivable tantas veces como queramos).
- Su derivada k-ésima en el origen vale $f^{(k}(0) = k!\, a_k$, de donde $a_k = \dfrac{f^{(k}(0)}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Vemos que los coeficientes del desarrollo toman la expresión de Taylor (4.3), lo que nos permite calcular dichos coeficientes para cualquier función que admita desarrollo en serie. Así pues, llamaremos **desarrollo en serie de Taylor** de la función f a:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}\, x^n}$$

Ejemplo. Consideramos la serie geométrica $\sum x^n$. Puesto que conocemos su suma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ |x|<1$$

podemos decir que la serie es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = 1/(1-x)$ en $(-1,1)$. Habitualmente procederemos en sentido inverso, partiendo de una función y obteniendo su desarrollo. Si, en nuestro ejemplo, calculamos las derivadas sucesivas de f en $x=0$ y, a partir de ellas, los coeficientes a_n, resulta (compruébese):

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow f^{(k}(0) = k! \Longrightarrow a_k = \frac{f^{(k}(0)}{k!} = 1$$

con lo que todos toman el mismo valor ($a_n = 1, \forall n$). La serie de Taylor obtenida es $1+x+x^2+\ldots$, que lógicamente coincide con la que consideramos al principio. Es decir:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

c. Condición necesaria y suficiente

Si $f \in C^\infty$, podemos calcular sus sucesivas derivadas y, a partir de ellas, los coeficientes del desarrollo de Taylor. Puede parecer entonces que la condición de pertenecer a C^∞ es suficiente para que f admita desarrollo en serie de Taylor, pero no es así: es necesaria, pero no suficiente. Enunciamos a continuación la condición necesaria y suficiente.

Sea $f \in C^\infty$. Es condición necesaria y suficiente para que f admita desarrollo en serie de Taylor en $(-r,r)$ que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0,\ \forall x \in (-r,r)}$$

Demostración. Tomamos el desarrollo limitado de Taylor de la función f, del que despejamos el término complementario:

$$f(x) = P_n(x) + T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i + T_n(x) \Longrightarrow T_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i \qquad (4.4)$$

El polinomio de Taylor, formado por los $n+1$ primeros sumandos de la serie, es la suma parcial de orden n de la serie de Taylor. Entonces la serie de Taylor convergerá a $f(x)$ en $(-r,r)$ si y sólo si el límite de $P_n(x)$ es **igual** a $f(x)$, cuando $n \to \infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n = f(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i = f(x)$$

Pero esto equivale a decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}x^i \right) = 0 \overset{(4.4)}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$$

Nota. Este resultado era de esperar, pues $T_n(x)$ es la diferencia entre el valor exacto de $f(x)$ y el valor aproximado por medio del polinomio de Taylor de grado n. Para que la serie represente exactamente a la función, esa diferencia debe hacerse tan pequeña como queramos, tomando un número de términos suficientemente alto. Es decir, $T_n(x)$ debe tener límite 0 cuando $n \to \infty$.

4.4. Ejercicios de autoevaluación

4.4.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. En el espacio funcional $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$, hemos definido la distancia entre dos funciones como el máximo de sus distancias punto a punto.

2. Sea $f_n = \dfrac{x}{1+nx^2} + x$. Se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x$.

3. La sucesión de término general $f_n(x) = \operatorname{sen}^n x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ converge uniformemente a:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \pi/2 \\ 0, & x \neq \pi/2 \end{cases}$$

4. Sea $\sum f_n$ definida en I. Si $\sum |f_n(x)|$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos, convergente, $\sum f_n$ es uniformemente convergente en I.

5. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Su campo de convergencia es $(-1,1)$.

6. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$. Su campo de convergencia es $[-1,1)$.

7. Una serie de potencias y sus series derivada y primitiva tienen el mismo campo de convergencia.

8. La serie de potencias $-1 - x - x^2 - x^3 \ldots$ tiene como suma $\dfrac{1}{x-1},\ |x| < 1$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$, tal que $\sum a_n x^n = f(x)$. Se dice entonces que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de $f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Si una función f es derivable indefinidamente, decimos que f pertenece a C^∞. Entonces podemos obtener sus derivadas de cualquier orden, por lo que la función admite desarrollo en serie de Taylor.

4.4.2. Cuestión

El desarrollo en serie de la función $f(x) = \ln(1+x)$ es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$

y su radio de convergencia vale $r = 1$. Se pide, utilizando el segundo teorema de Abel, obtener la suma de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

4.4.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F**. Se ha definido como "el supremo de sus distancias punto a punto", que existe siempre por tratarse de funciones acotadas (propiedad del supremo), mientras que el máximo puede no existir.

   Ej. Si $f(x) = 1/x,\ g(x) = 1$ y $I = [1, \infty)$, el conjunto de las distancias punto a punto entre f y g no tiene máximo. El supremo vale 1 y se da cuando $x \longrightarrow \infty$.

2. **V**. Para $x \neq 0$ el límite vale x, pues el denominador de la fracción tiende a ∞ y el primer sumando a 0. Para $x = 0$, las f_n valen 0, por lo que el límite vale 0, es decir x.

3. **F**. La función límite del enunciado es correcta, pero la convergencia no es uniforme, pues las funciones f_n son continuas y f no lo es (véase apdo. **4.1.5**).

4. **V**. Por el criterio de la mayorante (Weierstrass).

5. **V**. El límite $l = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo que $r = 1/l = 1$. Estudiando los extremos de $\mathcal{C}$ ($x = \pm 1$), vemos que en ellos la serie es divergente.

6. **V**. El límite $l = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo que $r = 1/l = 1$. Estudiando los extremos de $\mathcal{C}$, vemos que en $x = 1$ la serie es divergente y en $x = -1$ convergente.

7. **F**. Tienen igual **radio** de convergencia (véase apdo. **4.3.3**).

8. **V**. $-1 - x - x^2 - x^3 \ldots$ es una serie geométrica de razón $\lambda = x$. Su suma será:

$$S(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}, \quad |x| < 1$$

9. **F**. $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de $f(x)$ en $\mathcal{C}$, donde la serie converge, no en todo $\mathbb{R}$.

10. **F**. Que f pertenezca a C^∞ es condición necesaria, pero no suficiente, para que admita desarrollo en serie de Taylor. La condición necesaria y suficiente es que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$, siendo $T_n(x)$ el término complementario del desarrollo limitado de Taylor (apdo. **4.3.5**).

4.4.4. Solución de la cuestión

La serie numérica, cuya suma queremos obtener, converge por el teorema de Leibnitz.

Por otra parte, la serie de potencias del enunciado se convierte, para $x = +1$, en la serie buscada. Dicha serie de potencias tiene como suma la función $S(x) = \ln(1 + x)$, para valores de $|x| < 1$, lo que no permite en principio utilizar esta suma para $x = 1$, pues en los extremos del campo de convergencia ($x = \pm 1$) la serie puede converger o no.

El segundo teorema de Abel afirma que *si una serie de potencias* $\sum a_n x^n$ *converge para* $x = r$, *su suma es una función continua en* $x = r$. Como conocemos el valor de $S(x)\, \forall x \in (-1, 1)$, podemos obtener el valor de la suma de la serie en $x = 1$, como límite de $S(x)$ cuando $x \to 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1} \ln(1 + x) = \ln(1 + 1) = \ln 2$$

como ya sabíamos por el tema de Series numéricas, apdo. **3.8.2**.

Nota. En el otro extremo del campo de convergencia ($x = -1$), la serie que resulta es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

opuesta de la armónica, por tanto divergente a $-\infty$.

Tema 5

Los números complejos

5.1. Introducción

El objetivo de este tema es dar unas nociones básicas sobre los números complejos (una definición axiomática rigurosa puede verse en J. Burgos, p. 559).

Como sabemos, existe una biyección entre los puntos de la recta y los números reales, por lo que a cada elemento de uno de los dos conjuntos le corresponde uno, y sólo uno, del otro. Ello nos permite encontrar solución en $\mathbb{R}$ para ecuaciones que no la tienen en $\mathbb{Q}$, pese a lo cual siguen existiendo ecuaciones sin solución. Una de las más sencillas es:

$$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = -1$$

Con el fin de resolverla fuera de los números reales, definimos el número $i = \sqrt{-1}$, al que llamamos **unidad imaginaria**. De este modo, la ecuación tiene como solución:

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

A los números de la forma ki, con $k \in \mathbb{R}$, les llamamos **imaginarios** (o imaginarios puros). Si consideramos la ecuación:

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

llegamos a la solución:

$$x = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Como este resultado es la suma de un numero real y de otro imaginario, lo denominamos **número complejo**. A partir de la definición de este nuevo tipo de numero, podemos resolver ecuaciones como $e^x = -1$ ó $\cos x = 2$, que no tienen sentido en $\mathbb{R}$.

5.2. Definición. Forma binómica. Operaciones básicas

Un número complejo en **forma binómica** es todo elemento de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales y se llaman **parte real** y **parte imaginaria** de z respectivamente.

Tanto los números reales como los imaginarios puros son números complejos. Los primeros son complejos con la parte imaginaria nula ($b = 0$) mientras que los segundos tienen nula la parte real ($a = 0$). El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$.

Sean los complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. Definimos las siguientes operaciones.

a) Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$.

b) Producto: $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \in \mathbb{C}$.

c) Producto por $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot z = \lambda a + \lambda b i \in \mathbb{C}$.

Dos **complejos** son **iguales** si coinciden entre sí tanto las partes reales como las imaginarias:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2}$$

Es inmediato comprobar que el elemento **nulo** en $\mathbb{C}$ es el $0 = 0 + 0i$ y el elemento **unidad** es el $1 = 1 + 0i$. A partir de lo anterior se demuestra que $\mathbb{C}(+, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo (es también un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$).

De igual modo que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cada uno ampliación del anterior, $\mathbb{C}$ es una ampliación de $\mathbb{R}$. Basta observar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a = a + 0i \in \mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, y que las operaciones entre complejos de la forma $a + 0i$ se reducen a las operaciones entre reales.

5.3. Forma trigonométrica. Representación gráfica

Considerando las partes real a e imaginaria b de un complejo z como coordenadas cartesianas, observamos que existe una biyección entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$. Esto permite representar z como un punto del plano XY (al que llamaremos **afijo**) así como por un vector que une el origen O con el afijo.

Llamamos **módulo** ρ del complejo a la longitud de dicho vector. Si z es no nulo, su **argumento** θ es el ángulo que forma el vector con la dirección positiva del eje x (tomamos el sentido de giro antihorario como positivo). Resulta:

$$a = \rho\cos\theta,\quad b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \mathrm{tg}\,\theta = b/a\ \ (a \neq 0)$$

Si calculamos θ como arcotangente de b/a, hay que recordar que los argumentos θ y $\theta \pm \pi$ tienen la misma tangente, por lo que tendremos en cuenta el cuadrante en que se encuentra el afijo.

Para todo $z \neq 0$ existe un único valor $\theta \in (-\pi, \pi]$ (**argumento principal**) e infinitos valores $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (argumentos). Escribiendo las partes real e imaginaria en función de ρ y θ, z se puede expresar en **forma trigonométrica**:

$$z = \rho\cos\theta + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,i \Longrightarrow \boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

De lo anterior se deduce que dos **complejos** son **iguales** si y solo si tienen el mismo módulo y sus argumentos se diferencian en un número entero de veces 2π:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ y } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Interpretación geométrica de la suma o diferencia de complejos. Al representar los complejos por medio de dos componentes (como los vectores en el plano) observamos que su suma sigue también la regla del paralelogramo, por lo que sumar z a z_1 equivale a trasladar el afijo de z_1 según z; es decir, desplazarlo una distancia ρ, según la dirección dada por θ.

Así pues, sumar z a los complejos cuyos afijos forman una **figura geométrica**, equivale a trasladar la figura una distancia ρ, según la dirección dada por θ, sin deformarla ni girarla. Y el módulo de la diferencia de dos complejos es la **distancia** entre sus afijos.

Interpretación geométrica del producto de complejos. Sean $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. Operando, obtenemos (compruébese):

$$z_1 \cdot z_2 = \cdots = \rho_1\rho_2\big[\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i(\underbrace{\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2}_{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)})\big]$$

Es decir, el producto de dos complejos tiene como módulo el producto de sus módulos y como argumento la suma de sus argumentos. Entonces se cumple lo siguiente:

- Al multiplicar z_1 por $\rho \in \mathbb{R}$, multiplicamos su módulo por ρ, sin variar el argumento.
- Al multiplicar z_1 por $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, añadimos θ radianes a su argumento (lo giramos un ángulo θ en sentido antihorario), sin variar su módulo.

Por tanto, multiplicar por $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ a los complejos cuyos afijos forman una **figura geométrica** equivale a multiplicar sus dimensiones por ρ y girarla θ radianes.

Ejercicio. Sean los complejos $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 8 - 2i,\ z_3 = 8 + 2i,\ z_4 = 2 + 2i$.

a) Si los multiplicamos por $z = i/2$ ($\rho = 1/2$ y $\theta = \pi/2$), compruébese que la figura formada por sus afijos reduce su tamaño a la mitad y gira 90^o grados en sentido antihorario.

b) ¿Qué ocurre si multiplicamos por i el complejo $z_2 - z_1$?

c) Si los afijos de z_1 y z_2 son dos vértices consecutivos de un cuadrado situado en el cuarto cuadrante, ¿cómo podemos obtener los otros dos vértices?

5.4. Complejo conjugado, opuesto e inverso. Cociente

Sea el complejo $z = a + bi$. Definimos los complejos conjugado, opuesto e inverso.

a) El **conjugado** de z $(\bar{z})$ se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria. Es decir,

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Se cumple:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

b) El **opuesto** de z $(-z)$ es el complejo que, sumado a z, da como resultado el complejo nulo. Es inmediato ver que su expresión es:

$$\boxed{-z = -a - bi}$$

c) El **inverso** de $z \neq 0$ (z^{-1}) es el complejo que, multiplicado por z, da como resultado el complejo unidad. A partir de la propiedad del conjugado, obtenemos:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Longrightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Longrightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

Nota. El inverso de z puede escribirse como $1/z$, igual que en $\mathbb{R}$. En efecto:

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z^{-1}$$

d) El **cociente** de z_1 y z_2 $(z_2 \neq 0)$ se define como el producto de z_1 por el inverso de z_2.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}}$$

Esto puede interpretarse como el resultado de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador. En forma binómica, el cociente resulta:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Interpretación geométrica. Escribiendo z en la forma $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, obtenemos:

a) $\bar{z} = \rho\big(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta\big) = \rho\big(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\big)$.

El conjugado de z tiene el mismo módulo que z y el argumento opuesto al de z.

b) $-z = \rho\big(-\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta\big) = \rho\big(\cos(\theta+\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\pi)\big)$.

El opuesto de z tiene el mismo módulo que z y su argumento es el de z más π.

c) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{\rho^2}\cdot\rho\big(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\big) = \dfrac{1}{\rho}\big(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\big)$.

El inverso de z tiene como módulo el inverso de $|z|$ y como argumento el opuesto al de z.

d) $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1\cdot z_2^{-1} = \cdots = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\big)$.

El módulo del cociente es el cociente ρ_1/ρ_2; su argumento, la diferencia $\theta_1 - \theta_2$.

Ejercicio. Se propone comprobar que:

1. El conjugado de la suma es la suma de los conjugados y el conjugado del producto el producto de los conjugados.
2. Un complejo es imaginario puro si y sólo si su opuesto es igual a su conjugado.

5.5. Exponencial de un complejo. Fórmula de Euler

Dado $z = a + bi$, la exponencial de z es el (único) complejo de módulo e^a y argumento b:

$$\boxed{\exp(z) = e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b)}$$

Se define así la exponencial compleja para que conserve las propiedades que la función e^x posee en $\mathbb{R}$. En particular, la exponencial compleja de un número real, $\exp(a)$, $a\in\mathbb{R}$, coincidirá con la exponencial real de dicho número. En efecto, si el exponente es real, resulta:

$$a\in\mathbb{R} \Longrightarrow \exp(a) = \exp(a+0i) = e^a(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = e^a$$

con lo que, por ejemplo, la exponencial del complejo nulo vale 1, como ocurre en $\mathbb{R}$.

La exponencial compleja suele denotarse como e^z de modo simplificado aunque inexacto, pues esta expresión no tiene en general solución única. En efecto, e^z es un caso particular de la potencia compleja de un complejo $z_1^{z_2}$ (no estudiada aquí), que tiene en general infinitas soluciones.

A partir de la definición se verifican también (compruébese):

a) $\boxed{e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}}$, de donde se obtiene $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$.

b) $\boxed{e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}}$, de donde se obtiene $\boxed{1/e^z = e^{-z}}$.

En el caso particular $z = \theta i$, su exponencial valdrá:

$$e^z\big|_{z=0+\theta i} = e^0(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

de donde resulta la **fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Vemos que $e^{\theta i}$ representa el complejo de módulo 1 y argumento θ. Utilizando la fórmula de Euler resulta más sencillo recordar la expresión de la exponencial de z, pues

$$e^z = e^{x+yi} = e^x\, e^{yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Podemos ahora escribir un complejo en **forma exponencial**:

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{\theta i}}$$

En esta forma, los complejos conjugado e inverso de $\rho\, e^{\theta i}$ resultan ser:

$$\boxed{\bar{z} = \rho\, e^{-\theta i};\quad z^{-1} = \frac{1}{\rho}\, e^{-\theta i}}$$

Ejemplo. Veamos que $e^z = -1$ tiene solución en $\mathbb{C}$. En efecto:

$$e^z = -1 \Longrightarrow e^{a+bi} = e^a\, e^{bi} = e^{\pi i} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^a = 1 \Longrightarrow a = 0 \\ b = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Longrightarrow z = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones son los infinitos números imaginarios puros de la forma $z = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio. Representa en forma exponencial los complejos -1, i y $-i$. Calcula el valor o valores de x que satisfacen la ecuación $e^{xi} + i = 0$.

5.6. Potencia natural. Fórmula de Moivre

Al multiplicar el complejo z por sí mismo n veces, obtenemos el complejo z^n. Como sabemos por las propiedades del producto, su módulo valdrá ρ^n y su argumento $n\theta$, es decir:

$$z^n = \left[\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

En el caso particular $\rho = 1$, resulta la fórmula de Moivre:

$$\boxed{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta}$$

Ejercicio. Calcula $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.
Solución. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$; $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

5.7. Raiz n-ésima de un complejo

Decimos que $\omega \in \mathbb{C}$ es raíz $n-$ésima de $z \in \mathbb{C}$ si la potencia n de ω es igual a z.

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \omega \Longleftrightarrow \omega^n = z}$$

Sea $z = \rho\, e^{\theta i}$ y ω su raíz $n-$ésima, $\omega = r\, e^{\varphi i}$. Se cumplirá:

$$\omega^n = r^n\, e^{n\varphi i} = \rho\, e^{\theta i} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Es decir

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Dando valores a k, obtenemos distintas soluciones para el argumento $\varphi = \frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}$:

$$
\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Longrightarrow \varphi_0 = \frac{\theta}{n} \\
k = 1 \quad &\Longrightarrow \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + 1\,\frac{2\pi}{n} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{n} \\
k = 2 \quad &\Longrightarrow \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + 2\,\frac{2\pi}{n} = \varphi_0 + 2\,\frac{2\pi}{n} \\
&\vdots \\
k = n \quad &\Longrightarrow \varphi_n = \frac{\theta}{n} + \cancel{n}\frac{2\pi}{\cancel{n}} = \varphi_0 + 2\pi \\
k = n+1 \quad &\Longrightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + (n+1)\,\frac{2\pi}{n} = \varphi_0 + \cancel{n}\frac{2\pi}{\cancel{n}} + \frac{2\pi}{n} = \varphi_1 + 2\pi
\end{aligned}
$$

Vemos que, para $k = n$ y siguientes, los argumentos toman un valor anterior incrementado en 2π, por lo que el complejo que resulta es el mismo. Así pues, obtenemos sólo n complejos distintos, por lo que **todo complejo no nulo tiene n raíces $n-$ésimas**.

Al tener todas las raíces igual módulo, los afijos estarán en una circunferencia de radio $\rho^{\frac{1}{n}}$. Y al ser la diferencia angular entre dos raíces consecutivas $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$, estarán equiespaciados.

Es decir, los afijos de las n raíces $n-$ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $\rho^{\frac{1}{n}}$.

Ejercicio. Calcula las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y sextas de la unidad.

5.8. Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ a_i \in \mathbb{C}$, tiene alguna raiz compleja. Como consecuencia, un polinomio de grado $n \geq 1$ tendrá n raices complejas.

Si los coeficientes a_i son reales, se cumple:

$P_n(z)$ tiene n raíces complejas, contando cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, de modo que, para cada raíz compleja $a + bi$, es también raíz su conjugada $a - bi$.

Si existen p raíces reales distintas x_i, de orden de multiplicidad α_i y q raíces complejas no reales z_j, de orden β_j, cada una con su conjugada $\bar{z}_j$, descomponiendo en factores obtenemos:

$$\boxed{P_n(z) = a_n(z - x_1)^{\alpha_1} \ldots (z - x_p)^{\alpha_p}(z - z_1)^{\beta_1}(z - \bar{z}_1)^{\beta_1} \ldots (z - z_q)^{\beta_q}(z - \bar{z}_q)^{\beta_q}}$$

siendo el grado $n = \alpha_1 + \cdots \alpha_p + 2\,(\beta_1 + \cdots \beta_q)$.

Como consecuencia, si n es impar, habrá al menos una raiz real. Si n es par, el número de raíces reales será par o nulo.

5.9. Ejercicios de autoevaluación

5.9.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Si multiplicamos por $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ a los complejos cuyos afijos forman un cuadrado centrado en el punto $C(3, 0)$, los afijos de los complejos resultantes formarán un cuadrado de lado doble, girado 90 grados en sentido antihorario, centrado en el punto $C'(0, 6)$.

2. Si sumamos $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ a los complejos cuyos afijos forman un triángulo de vértices los puntos $(-1,0)\,(0,0)$ y $(0,1)$, el vértice correspondiente al ángulo recto se desplazará una distancia igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo, paralelamente a ella.

3. El conjugado y el inverso de un complejo $z \neq 0$ coinciden, siempre que su módulo sea menor que 1.

4. Se cumple $e^{\frac{3\pi}{2}i} + i = 0$.

5. El inverso de e^z cumple: $(e^z)^{-1} = \dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

6. Los afijos de las raíces quintas de la unidad forman un pentágono regular, con un vértice en el eje real.

7. Los afijos de las raíces $2n, n \in \mathbb{N}$, de la unidad forman un polígono regular de $2n$ vértices, con dos vértices en el eje imaginario.

8. El polinomio $P_7(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_7 z^7$ tiene 7 raíces en $\mathbb{C}$, de las cuales son reales un número impar de ellas, comprendido entre 1 y 7.

5.9.2. Cuestión

Sea el complejo $z = x + yi$. Se pide razonar en qué casos se verifican las siguientes igualdades:

a) $|e^z| = e^{|z|}$

b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

5.9.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V**. El nuevo centro C' se obtiene como los nuevos vértices, multiplicando por z el complejo correspondiente al antiguo ($z_C = 3$). Esto es, $z_{C'} = 3 \cdot 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 6e^{\frac{\pi}{2}i} = 6i$, que corresponde al punto $(0,6)$ (apdo. **5.3**).

2. **V**. El nuevo vértice se obtiene sumando z al complejo correspondiente al origen, es decir $z_{0'} = 0 + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 1 + i$, que corresponde al punto $(1,1)$ (apdo. **5.3**).

3. **F**. Coinciden si su modulo es igual a 1, pues $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$. Si $|z| = 1 \Longrightarrow z^{-1} = \overline{z}$.

4. **V**. Pues $e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

5. **V**. El inverso de un complejo w se representa por w^{-1} o también por $\dfrac{1}{w}$ (apdo **5.4**). Además se cumple que $\dfrac{1}{e^z} = \dfrac{e^0}{e^z} = e^{0-z} = e^{-z}$.

6. **V**. Se cumple para las raíces de la unidad de índice impar cualquiera. Hay siempre una (y sólo una) en el eje real, correspondiente a la raiz $z = +1$.

7. **F**. Forman un polígono regular de $2n$ vértices, con dos de ellos en el eje real, correspondientes a las raíces $z = \pm 1$.

8. **V**. Un polinomio de grado k posee k raíces en $\mathbb{C}$ (teorema Fundamental del Álgebra). Por otra parte, si existe una raiz compleja existe también la conjugada, por lo que el número de raíces complejas no reales (con parte imaginaria no nula) es siempre par.

   Como las raíces complejas no reales van siempre de dos en dos, habrá 0, 2, 4 ó 6. Entonces, si el grado del polinomio es impar (en este caso 7), el número de raíces reales será impar: como mínimo una y como máximo siete.

5.9.4. Solución de la cuestión

a) Para resolver este apartado, desarrollamos ambas expresiones:

Por la definición de e^z, sabemos que su módulo es e^x. Además, podemos verlo operando:

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x\,|\cos y + i \operatorname{sen} y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = e^x$$

Por otro lado,

$$e^{|z|} = e^{|x+yi|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Igualando los dos resultados, obtenemos:

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}} \Longleftrightarrow x = \sqrt{x^2+y^2}$$

que sólo tiene sentido si $x \geq 0$. En ese caso, elevando al cuadrado,

$$x^2 = x^2 + y^2,\ x \geq 0 \Longleftrightarrow y = 0,\ x \geq 0$$

La igualdad se cumple sólo si la parte imaginaria de z es nula y la parte real es no negativa, es decir para $z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

b) Podemos llegar de una expresión a la otra $\forall z \in \mathbb{C}$, luego representan el mismo complejo.

$$\overline{e^z} \overset{(1)}{=} \overline{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \overset{(2)}{=} e^x\left(\overline{\cos y + i \operatorname{sen} y}\right) \overset{(3)}{=} e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) \overset{(4)}{=} e^x\, e^{-yi} \overset{(5)}{=} e^{x-yi} \overset{(6)}{=} e^{\bar{z}}$$

donde hemos dado los siguientes pasos:

(1) Por definición de exponencial compleja e^z.

(2) Pues e^x es un factor real y sale del conjugado.

(3) Por definición de conjugado.

(4) Ponemos el complejo conjugado en forma exponencial.

(5) Por las propiedades de la exponencial compleja.

(6) Por definición de conjugado.

Nota. Lo anterior se puede escribir más brevemente, usando la notación exponencial para e^z y las propiedades de la exponencial compleja.

$$\overline{e^z} = \overline{e^{x+yi}} = \overline{e^x\, e^{yi}} = e^x\,\overline{e^{yi}} = e^x\, e^{-yi} = e^{x-yi} = e^{\bar{z}}$$

Tema 6

Documentos de apoyo

Como se dice en la **Presentación** de estos apuntes, este tema final contiene diversos documentos que los complementan. Se incluyen en él algunos ejercicios con mayor dificultad que los ejemplos resueltos que acompañan a la teoría, así como demostraciones de cierto interés, que se ha visto preferible no incluir en el texto.

6.1. Integrabilidad: condiciones suficientes (apdo. 1.2.5)

6.1.1. Toda función monótona en $I=[a,b]$ es integrable en I

Demostración. Supongamos que f es monótona creciente y $f(b) > f(a)$ (si $f(b) = f(a)$ la función es constante y su integrabilidad inmediata). Entonces, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i = \text{ínf}\, f(x) = f(x_{i-1})\,; \quad M_i = \sup f(x) = f(x_i)$$

Elegido $\varepsilon > 0$, tomamos una partición tal que $\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, con la cual resulta:

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$
$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \left[f(x_n) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + \cdots + f(x_1) - f(x_0)\right] = \varepsilon$$

luego $S(P) - s(P) < \varepsilon$ y se cumple la condición de integrabilidad.

6.1.2. Toda función continua en $I=[a,b]$ es integrable en I

Demostración. Si f es continua en $[a, b]$, será uniformemente continua en $[a, b]$, por lo que dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existirá un δ tal que, para $x, x' \in [a, b]$ se cumple:

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \tag{6.1}$$

Sea $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ una partición de $[a, b]$ tal que $\Delta x_i < \delta$. Como f es continua, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ alcanzará valores máximo y mínimo, es decir $m_i = f(x_i')$ y $M_i = f(x_i'')$ para ciertos x_i', x_i'' de $[x_{i-1}, x_i]$.
Entonces, al ser $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i < \delta$, se cumplirá $x_i' - x_i'' < \delta$; luego, debido a (6.1),

$$M_i - m_i = |M_i - m_i| = |f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Por tanto, para la partición P, tenemos:

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

con lo que se cumple la condición de integrabilidad.

6.1.3. Toda función continua a trozos en $I=[a,b]$ es integrable en I

Decimos que una función es continua a trozos si tiene un número finito de puntos de discontinuidad, existen en ellos límites laterales y son finitos.

Demostración. Puede verse en J. Burgos, p. 296.

6.2. Segundo teorema fundamental (apdo. 1.5)

Si f es integrable en $[a,b]$ y g es primitiva de f, se cumple $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Demostración. Sea $P(x_0, \ldots, x_n)$ una partición de $[a,b]$. Consideramos un subintervalo cualquiera $[x_{i-1}, x_i]$.
Al ser primitiva de f, g es derivable en $[a,b]$. Entonces, por el teorema de Lagrange,

$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \,/\, g'(\xi_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \tag{6.2}$$

Como $g'(\xi_i) = f(\xi_i)$ y $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, de la igualdad (6.2) obtenemos:

$$f(\xi_i)\Delta x_i = g(x_i) - g(x_{i-1}) \tag{6.3}$$

Sean $m_i = \text{ínf}\, f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Para todo $i = 1, \ldots, n$ se cumple:

$$m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$$

luego, teniendo en cuenta (6.3),

$$m_i \Delta x_i \le g(x_i) - g(x_{i-1}) \le M_i \Delta x_i,\ \ i = 1 \ldots n \tag{6.4}$$

Repetimos ahora la expresión (6.4) para cada uno de los valores de i y sumamos. Obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

donde el primero y tercer términos son las sumas inferior y superior de Darboux para la partición P, mientras que el segundo término resulta:

$$g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + \ldots g(x_n) - g(x_{n-1}) = g(b) - g(a)$$

Entonces tenemos que, para toda partición P,

$$s(P) \le g(b) - g(a) \le S(P)$$

es decir que el valor $g(b) - g(a)$ está acotado por las sumas inferior y superior de Darboux.
Al ser f integrable, tomando particiones P_m cada vez más finas, las sumas de Darboux tienden al límite común:

$$\lim_{m\to\infty} S(P_m) = \lim_{m\to\infty} s(P_m) = \int_a^b f(x)dx$$

Luego se cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

6.3. Demostración de tres desigualdades (apdo. 2.2)

Sean los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, de un espacio vectorial $\mathbb{R}^p$. Vamos a demostrar tres propiedades.

6.3.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

El producto escalar de dos vectores es menor o igual que el producto de sus normas.

$$\boxed{|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$$

Demostración. Si $\vec{x}=\vec{0}$, ambos miembros se anulan y se verifica la igualdad.

Si $\vec{x}\neq\vec{0}$, definimos el vector $\lambda\vec{x}+\vec{y}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Por la positividad del producto escalar, se cumplirá:

$$(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y}) \geq 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Operando la expresión anterior, se convierte en:

$$\lambda^2\|\vec{x}\|^2 + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \geq 0$$

Si hacemos

$$A=\|\vec{x}\|^2,\quad B=2(\vec{x}\cdot\vec{y}),\quad C=\|\vec{y}\|^2$$

nos queda un trinomio de segundo grado en λ, que toma sólo valores no negativos:

$$A\lambda^2+B\lambda+C\geq 0$$

Entonces el trinomio tiene a lo sumo una raíz real (de tener dos, su valor sería negativo entre ambas, pues el coeficiente $A>0$).

Recordando la fórmula para el cálculo de las raíces de la ecuación de segundo grado, lo anterior significa que el discriminante B^2-4AC ha de ser menor o igual que 0. Entonces:

$$B^2-4AC = 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0 \Longrightarrow 4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq 4\|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2$$

Simplificando y extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros, llegamos a la expresión buscada.

6.3.2. Desigualdad triangular de la norma

La norma de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de sus normas:

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$$

Demostración. Para demostrar esta desigualdad, daremos los pasos siguientes:

a) Partimos del cuadrado de la norma del vector $\vec{x}+\vec{y}$, igual al producto escalar del vector por sí mismo, y desarrollamos este producto.

b) Tenemos en cuenta que $\vec{x}\cdot\vec{y}\leq|\vec{x}\cdot\vec{y}|$, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (6.3.1) y reconocemos la expresión del cuadrado de una suma:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y}) \leq$$
$$\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\,|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

Por tanto,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada, resulta la expresión que queríamos demostrar.

6.3.3. Desigualdad triangular de la distancia

La distancia entre dos puntos es menor o igual que la suma de las distancias de esos puntos a un tercero.

$$\boxed{d(\vec{x},\vec{z}) \le d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z})}$$

Demostración. Se demuestra a partir de la definición de distancia y la desigualdad triangular de la norma (**6.3.2**):

$$d(\vec{x},\vec{z}) = \|\vec{x}-\vec{z}\| = \|(\vec{x}-\vec{y})+(\vec{y}-\vec{z})\| \le \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\| = d(\vec{x},\vec{y}) + d(\vec{y},\vec{z})$$

6.4. Ejercicios de límites (apdo. 2.4.1)

Calculamos el límite en el origen de las siguientes funciones de dos variables.

Ejemplo 1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} & x^2 \neq y^2 \\ 0 & x^2 = y^2. \end{cases}$

Calculamos el límite direccional, según la dirección del vector unitario $\vec{\omega}$:

$$\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a}+\lambda\vec{\omega}) = \lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^2({\omega_x}^2+{\omega_y}^2)}{\lambda^2({\omega_x}^2-{\omega_y}^2)} = \frac{1}{{\omega_x}^2-{\omega_y}^2}$$

que depende de la dirección, por lo que no existe límite funcional.

Ejemplo 2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0. \end{cases}$

Límite direccional: $\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y) = \lim_{\lambda\to 0} \dfrac{\lambda^2{\omega_x}^2}{\lambda\,\omega_y} = 0,\ \forall \omega_y \neq 0.$

Para $\omega_y = 0$ (eje OX) la función es nula, luego su límite vale 0. Entonces todos los límites direccionales coinciden, por lo que puede existir límite funcional.

Sin embargo, si nos acercamos al origen por cualquier parábola $y = kx^2,\ k \neq 0$, es decir por puntos de coordenadas (x, kx^2), con valores de x tendiendo a 0, la función toma en todos ellos el valor $1/k \neq 0$, por lo que no existe límite funcional.

Ejemplo 3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0). \end{cases}$

Límite direccional: $\lim_{\lambda\to 0} \dfrac{2\lambda^2\omega_x^2\lambda\,\omega_y}{\lambda^2\omega_x^2+\lambda^2\omega_y^2} = \lim_{\lambda\to 0} \dfrac{2\lambda^3\omega_x^2\,\omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)} = \lim_{\lambda\to 0} 2\lambda\omega_x^2\,\omega_y = 0.$

Los límites direccionales existen y son nulos, por lo que, si existe límite funcional, será nulo también. Para calcularlo usamos coordenadas polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. Si $\rho \to 0$, nos estamos acercando al $(0,0)$ por cualquier camino. Obtenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

luego existe límite funcional y, como preveíamos, es nulo.

Ejercicio 1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$

Solución. No existe límite funcional pues no existen los direccionales, salvo en la dirección OX.

Ejercicio 2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{y^2+x} & y^2+x\neq 0\\ 1 & y^2+x=0\end{cases}$

Solución. Aunque los límites direccionales existen y coinciden, no existe límite funcional (véase ejemplo **2**).

Ejercicio 3. $f(x,y)=\begin{cases}xy\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}+\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}\right) & x\,y\neq 0\\ 0 & x\,y=0\end{cases}$

Solución. Vale 0 (véase ejemplo **3**).

6.5. Jacobiano de la función inversa (apdo. 2.6.2)

Funciones de una variable. El modo práctico que utilizamos para obtener la derivada de la función f^{-1}, inversa de f, es el siguiente:

$$y=f^{-1}(x)\Longrightarrow x=f(y)\Longrightarrow 1=f'(y)\,y'\Longrightarrow y'=\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)}$$

Es decir, *la derivada de la función f^{-1}, inversa de f, es el inverso de la derivada de f.*

Funciones vectoriales. Dada una función $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, consideramos su función inversa $\vec{f}^{-1}(\vec{x})$, de donde despejamos $\vec{x}$:

$$\vec{y}=\vec{f}^{-1}(\vec{x})\Longrightarrow\vec{x}=\vec{f}(\vec{y})$$

Derivamos ambos miembros respecto de $\vec{x}$. Teniendo en cuenta que el primero es la función identidad $\vec{\phi}(\vec{x})=\vec{x}$, su derivada respecto a $\vec{x}$ será la matriz unidad:

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}=I \tag{6.5}$$

Aplicamos al segundo miembro la regla de la cadena, obteniendo:

$$\frac{d\vec{f}(\vec{y})}{d\vec{x}}=\frac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\,\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}} \tag{6.6}$$

Igualamos las expresiones (6.5) y (6.6) y despejamos la derivada de $\vec{f}^{-1}$. Resulta:

$$I=\frac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\,\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}}\Longrightarrow\boxed{\frac{d\vec{f}^{-1}}{d\vec{x}}=\left[\frac{d\vec{f}}{d\vec{y}}\right]^{-1}_{\vec{y}=\vec{f}^{-1}(\vec{x})}}$$

Es decir, *el jacobiano de la función inversa de $\vec{f}$ es la matriz inversa del jacobiano de $\vec{f}$.*

Ejemplo. Relación entre polares y cartesianas. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida como:

$$\begin{Bmatrix}\rho\\ \theta\end{Bmatrix}=\vec{f}(x,y)\ \text{ con }\ \begin{cases}\rho=f_1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\\ \\ \theta=f_2(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

Sea su inversa $\vec{f}^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, dada por $\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=\vec{f}^{-1}(\rho,\theta)$, con $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\end{cases}$

Veamos que los jacobianos de $\vec{f}$ y f^{-1} son matrices inversas entre sí.
Calculamos el de $\vec{f}^{-1}$:

$$\frac{d\vec{f}^{-1}}{d(\rho,\theta)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}$$

El jacobiano de f resulta:

$$\frac{d\vec{f}}{d(x,y)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} & \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

que, en función de las variables (ρ,θ), se convierte en:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta\\ -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} & \dfrac{\cos\theta}{\rho}\end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que el producto de ambos es la matriz unidad.

6.6. Problema de extremos con 2 variables (apdo. 2.9.1)

Calculamos los extremos de la función $f:D\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\mathrm{sen}(x+y)-\cos(x-y)$, en el dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\le x\le\pi/2,\ 0\le y\le\pi/2\}$.

Estudio del interior del dominio $(0<x<\pi/2,\ 0<y<\pi/2)$**.** De la **condición necesaria** de extremo obtenemos un punto crítico:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)=0\,;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos(x+y)-\mathrm{sen}(x-y)=0\implies P\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

Condición suficiente: calculamos las derivadas segundas y obtenemos el hessiano: $\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

que corresponde a una forma cuadrática indefinida, por lo que se trata de un punto de silla.

Estudio de la frontera. El dominio es un cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(0,\pi/2)$, $C(\pi/2,0)$ y $D(\pi/2,\pi/2)$. En cada segmento determinado por dos de ellos, f se convierte en una función de una variable, a la que primero buscamos puntos de derivada nula y luego calculamos el valor en los extremos del segmento (lo haremos de una sola vez al final).

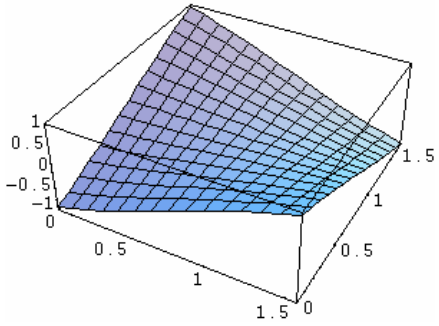
a) En AC, $y = 0 \Longrightarrow f = \operatorname{sen} x - \cos x \Longrightarrow f' = \cos x + \operatorname{sen} x$. La ecuación $f' = 0$ no tiene solución para $x \in [0, \pi/2]$.

b) En BD, $y = \pi/2 \Longrightarrow f = \operatorname{sen}(x + \pi/2) - \cos(x - \pi/2) = \cos x - \operatorname{sen} x \Longrightarrow f' = -\operatorname{sen} x - \cos x$. Tampoco existe solución para $f' = 0$ en $x \in [0, \pi/2]$.

c) En AB, $x = 0 \Longrightarrow f = \operatorname{sen} y - \cos y$ (idéntico al caso a).

d) En CD, $x = \pi/2 \Longrightarrow f = \operatorname{sen}(\pi/2 + y) - \cos(\pi/2 - y)$ (id. al caso b).

Los valores de f en los 4 extremos son: $f_A = f_D = -1$; $f_B = f_C = 1$, por lo que f tiene un punto de silla en $P(\pi/4, \pi/4)$, así como dos máximos relativos en B y C y dos mínimos relativos en A y D. Estos extremos relativos son también absolutos en sentido amplio ($\leq$).



6.7. Forma cuadrática semidefinida (apdo. 2.9.2)

Estudiamos los extremos de $f(x, y) = x^2 + ky^4$, en función del signo de k.

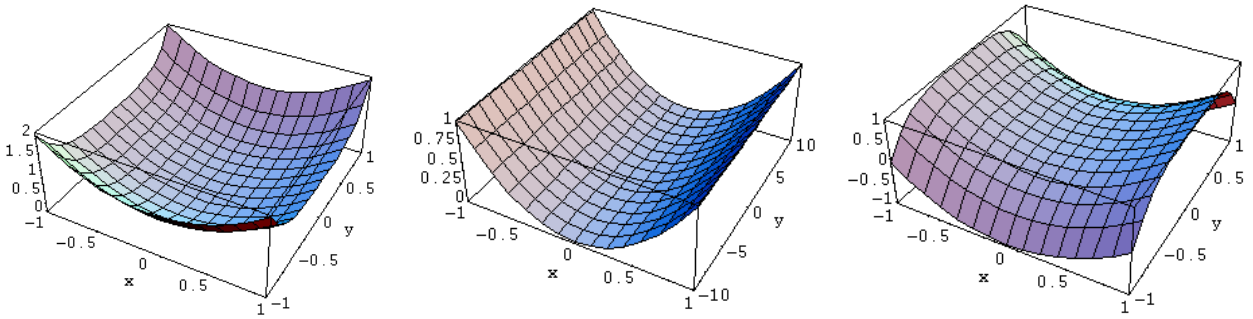
Condición necesaria. A partir de $\nabla f = \vec{0}$, se obtiene el punto crítico $P(0, 0)$.

Condición suficiente. La única derivada segunda no nula es $f''_{xx} = 2$, mientras que $f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = 0$. Entonces $d^2 f(0, 0) = 2dx^2 \geq 0$, por lo que la diferencial segunda de f es una forma cuadrática semidefinida positiva.

Sin embargo, según el signo que demos a k, obtenemos distintos resultados:

1. Para $k > 0$, la función alcanza un **mínimo** relativo (y absoluto) en $P(0, 0)$.
2. Para $k = 0$, la función se convierte en $z = x^2$ (cilindro parabólico), que tiene un **mínimo en sentido amplio** a lo largo de toda la recta $x = 0$ (eje Y).
3. Para $k < 0$, la función se convierte en $z = x^2 - |k|\, y^4$. Si, a partir de $P(0, 0)$, nos movemos por el eje X, f crece. Si lo hacemos por el eje Y, la función decrece. Concluimos que en $P(0, 0)$ no hay máximo ni mínimo (es un **punto de silla**).

En la figura siguiente se representan, los casos $k = 1$, $k = 0$ y $k = -1$:



6.8. Función implícita. Ejemplos (apdo. 2.10.3)

1.- Sea $g(x,y,z) = z^3 + 2xyz + x$. Se pide demostrar que la ecuación $g = 0$ define a z como función implícita de x e y, $z = \psi(x,y)$, en un entorno de $P(1,-1,1)$, así como obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \psi(x,y)$ en dicho punto.

La función g y sus derivadas son continuas, por ser polinómicas:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2xz, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 3z^2 + 2xy$$

Además se cumple $g(1,-1,1) = 0$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,-1,1) = 1 \neq 0$.

Entonces existe $z = \psi(x,y)$, diferenciable, en un entorno de P.

A partir de las derivadas of g, obtenemos las derivadas de ψ respecto a x e y:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P = -1, \ \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P = 2 \Longrightarrow \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_P = -\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P = 1, \ \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_P = -\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P = -2$$

lo que nos permite calcular la ecuación del plano tangente:

$$z = \psi|_P + \frac{1}{1!}\left(\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_P (x-1) + \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_P (y+1)\right) = 1 + (x-1) - 2(y+1)$$

2.- Sean $g_1(x,y,z) = x^2 + xy + z$ y $g_2(x,y,z) = x + y^2 - z^2$. Se pide demostrar que la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$ define las funciones implícitas $y = \psi_1(x)$, $z = \psi_2(x)$ en un entorno de $P(-1,1,0)$. Calcúlense las derivadas de ψ_1 y ψ_2 respecto a x, en P.

Tanto g_1 y g_2 como sus derivadas parciales respecto a x, y y z son continuas:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 2x + y, \ \frac{\partial g_1}{\partial y} = x, \ \frac{\partial g_1}{\partial z} = 1, \ \frac{\partial g_2}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial g_2}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial g_2}{\partial z} = -2z$$

Además se cumple: $\vec{g}|_P = \vec{0}$; $\left.\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial(y,z)}\right|_P = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}\right|_P = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Entonces existe la función implícita $\vec{\psi}(x)$, diferenciable, y se verifica:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\psi_1}{dx} \\ \dfrac{d\psi_2}{dx} \end{Bmatrix}_P = -\left[\frac{\partial \vec{g}}{\partial(y,z)}\right]^{-1}\left\{\frac{\partial \vec{g}}{\partial x}\right\}_P = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

Nota. Este resultado puede también obtenerse resolviendo un sistema de ecuaciones.

Tenemos que: $g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi_1(x) = 0$; $g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi_2(x) = 0$.

Derivamos ϕ_1 y ϕ_2 y particularizamos en P:

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} = (2x+y) + x\frac{d\psi_1}{dx} + 1\frac{d\psi_2}{dx} = 0$$
$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} = 1 + 2y\frac{d\psi_1}{dx} - 2z\frac{d\psi_2}{dx} = 0$$

En P: $-1 - \left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P + \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_P = 0$; $1 + 2\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P - 0 = 0 \Longrightarrow \boxed{\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_P = -\dfrac{1}{2}; \ \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_P = \dfrac{1}{2}}$

6.9. Extremos con 2 condiciones. Ejemplo (apdo. 2.11.2)

Calculamos los extremos de la función $V = x + y + 2z$ con las condiciones:

$$3x^2 + y^2 = 12; \quad x + y + z = 2$$

Función lagrangiana: $L = V + \lambda g_1 + \mu g_2 = x + y + 2z + \lambda(3x^2 + y^2 - 12) + \mu(x + y + z - 2)$.

Condición necesaria:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 6x\lambda + \mu = 0 \tag{6.7}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda + \mu = 0 \tag{6.8}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + \mu = 0 \tag{6.9}$$
$$g_1 = 3x^2 + y^2 - 12 = 0 \tag{6.10}$$
$$g_2 = x + y + z - 2 = 0 \tag{6.11}$$

Restando (6.7) a (6.8) y teniendo en cuenta que $\lambda \neq 0$, obtenemos: $y = 3x$.

De (6.9) resulta el valor $\mu = -2$.

Introduciendo $y = 3x$ en (6.10) y (6.11) obtenemos dos posibles extremos, cada uno correspondiente a un valor de λ: $P_1(1, 3, -2)$, $\lambda_1 = 1/6$; $P_2(-1, -3, 6)$, $\lambda_2 = -1/6$.

Condición suficiente:

Los hessianos en ambos puntos son:

$$H_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SDP}; \qquad H_{P_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SDN}.$$

Ambas son matrices semidefinidas, por lo que estudiamos la diferencial segunda, $d^2L|_{dg_i=0}$.

Punto P_1:

$$d^2L = dx^2 + \frac{1}{3}dy^2 \tag{6.12}$$
$$dg_1 = 0 \Longrightarrow 6x dx + 2y dy \overset{P_1}{=} 6dx + 6dy = 0 \Longrightarrow dx + dy = 0 \tag{6.13}$$
$$dg_2 = 0 \Longrightarrow dx + dy + dz = 0 \tag{6.14}$$

De (6.13) y (6.14) resulta $dz = 0$, por lo que ha de ser no nulo dx o dy (al menos uno de ellos). Entonces la expresión (6.12) es siempre positiva, luego en P_1 existe un mínimo.

Punto P_2:

$$d^2L = -dx^2 - \frac{1}{3}dy^2 \tag{6.15}$$
$$dg_1 = 0 \Longrightarrow 6x dx + 2y dy \overset{P_2}{=} -6dx - 6dy = 0 \Longrightarrow dx + dy = 0 \tag{6.16}$$
$$dg_2 = 0 \Longrightarrow dx + dy + dz = 0 \tag{6.17}$$

De (6.16) y (6.17) resulta $dz = 0$, por lo que (como en el caso de P_1) ha de ser no nulo dx o dy. Entonces la expresión (6.15) es siempre negativa, por lo que en P_2 existe un máximo.

6.10. Ejercicios resueltos de suma de series (apdo. 3.8.5)

6.10.1. Descomposición en combinación lineal de series convergentes

Si al descomponer el término general de la serie obtenemos distintos sumandos correspondientes a series convergentes, utilizamos la propiedad 5: *"La combinación lineal de series convergentes es convergente y su suma es la combinación lineal de las sumas"*.

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$, tomando como dato $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Descomponemos a_n: $2n^2+2n+1 = n^2+(n+1)^2 \Longrightarrow a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1.$

Ejemplo 2. Obtén $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $\left(\text{dato } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$.

Observamos que $2n+1 = (n+1)^2 - n^2 \Longrightarrow a_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 1.$

Nota. El Ejemplo 2 puede también resolverse como serie telescópica.

6.10.2. Descomposición en combinación lineal de series divergentes

Si varios de los términos en que se descompone a_n corresponden a series divergentes, no podemos sumarlos por separado, sino que hay que estudiar una suma parcial de a_n. En el siguiente ejemplo se utiliza la serie armónica.

Ejemplo 3. Suma la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-n}$.

Descomponemos el término general: $a_n = \cdots = \dfrac{3/2}{n-1} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1/2}{n+1}$.

La suma parcial vale:

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{3/2}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1/2}{n+1}\right) = \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} - 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\frac{3}{2}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - 2\left(H_n - 1\right) + \frac{1}{2}\left(H_n - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2}\right) H_n - \frac{3}{2}\frac{1}{n} + 2 - \frac{1}{2}\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = -\frac{3}{2n} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2n+2} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{4}}$$

Ejercicio propuesto. Calcula: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$. **Solución.** $S = \dfrac{1}{4}$.

6.11. Sucesión de funciones continuas (apdo. 4.1.5)

Propiedad: *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones f_n, definidas en I. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I y las f_n son continuas en I, entonces f es continua en I.*

Demostración: Hemos de probar que, para todo punto a de I, se cumple:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{6.18}$$

- Por la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ / \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall m \geq n_0, \forall x \in I \tag{6.19}$$

- Por la continuidad de las funciones f_n en I sabemos que, $\forall a \in I$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \ \forall m \in \mathbb{N} \tag{6.20}$$

Entonces, dado ε, obtenemos $n_0(\varepsilon)$ en (6.19) y elegimos un m cualquiera tal que $m \geq n_0$. Ahora, a partir de ε y la condición (6.20), de continuidad de f_m en a, obtenemos δ. Así pues, dado ε, existen m y δ tales que se cumplen las dos condiciones al tiempo. Como resultado, se cumplirá la condición (6.18).
En efecto, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - f(a)| = |(f(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - f_m(a)) + (f_m(a) - f(a))| \leq$$
$$\underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{(2)} + \underbrace{|f_m(a) - f(a)|}_{(3)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

donde los sumandos (1) y (3) son menores que $\varepsilon/3$ por la continuidad uniforme de $\{f_n\}$. Y el sumando (2) es menor que $\varepsilon/3$ por la continuidad de f_m en a.

6.12. Continuidad, derivación e integración de una serie de potencias (apdo. 4.3.3)

Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia $r > 0$, y sea $S(x)$ su suma. Se cumple:

a) $S(x)$ es continua en todo $x \in (-r, r)$.

b) $S(x)$ es derivable en todo $x \in (-r, r)$ siendo su derivada $S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.

c) $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$. Su integral es $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Demostración.

a) Lo demostramos en dos partes.

a.1) $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en todo compacto $[-\rho, \rho] \subset (-r, r)$.

Al ser $0 < \rho < r$, la serie converge absolutamente para $x = \rho$, es decir $\sum |a_n \rho^n|$ es convergente (teorema de Cauchy-Hadamard, 4.3.2).

Entonces, $\forall x / \ |x| \leq \rho$, se cumple $|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n|$, por lo que $\sum a_n x^n$ tiene como mayorante a una serie numérica de términos positivos convergente. Luego, por el teorema de Weierstrass, es uniformemente convergente en $[-\rho, \rho]$.

a.2) Para todo $x \in (-r, r)$ podemos encontrar un ρ tal que:

$$-r < -\rho < x < \rho < r$$

(por ejemplo, si $x > 0$, $\rho = (x + r)/2$).

Por **a.1**, la serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[-\rho, \rho]$. Al ser las funciones $a_n x^n$ continuas $\forall x$, la suma $S(x)$ será continua en todo $x \in (-r, r)$ (apdo. **4.2.4**).

Nota: Al enunciar los teoremas de Abel se verá que, si la serie converge en $x = r$ ó $x = -r$, $S(x)$ será continua también en esos puntos, no sólo en $(-r, r)$.

b) Sea la serie de derivadas $\sum n a_n x^{n-1}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

su radio de convergencia coincide con el de $\sum a_n x^n$, luego ambas series convergen uniformemente en los mismos intervalos.

La serie $\sum a_n x^n$ converge al menos en $x = 0$ y sus sumandos son funciones derivables. Entonces la suma $S(x)$ de $\sum a_n x^n$ es derivable en $(-r, r)$ y se cumple que la derivada de la suma es la suma de la serie de las derivadas (apdo. **4.2.6**):

$$S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$$

c) Sea la serie de integrales (entre 0 y x) $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Como el radio de convergencia de su serie derivada $\sum a_n x^n$ es r, el suyo será también r, como acabamos de ver.

Como $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$, (visto en **a.1**) y sus sumandos son funciones integrables, entonces la función suma $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$ y se cumple (apdo. **4.2.5**):

$$\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Tema 7

Cuestiones y problemas de examen

7.1. Cuestiones de examen

Curso 10/11

1.– Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) La función parte entera de x no es continua en $I = [0, 4]$, luego no es integrable en I.

b) Toda función continua en un intervalo I, tiene primitiva en dicho intervalo *(junio 2011)*.

2.– Sea el intervalo $I = [0, \pi]$. Sea la función $f(t) = \operatorname{sen} t$, definida en I. Se pide:

a) Obtener la función integral de f, comprobando que se verifica el primer teorema fundamental del Cálculo.

b) A partir del apartado **a)**, calcular las áreas S_1 y S_2 determinadas por la función f, el eje OX y las rectas $x = \pi/6$ y $x = \pi/3$ respectivamente *(julio 2011)*.

Curso 11/12

3.– Comenta la siguiente afirmación: "Como consecuencia del teorema fundamental del Álgebra, si el grado de un polinomio es impar, existe al menos una raiz real; si es par, existen al menos dos raíces complejas (no reales) conjugadas" *(junio 2012)*.

4.– Sea un cilindro recto de altura h y base circular de radio r. Aplicando el concepto de diferencial de una función, obtén el incremento aproximado que sufre el volumen de un cilindro de dimensiones $r = 1\,\text{m},\ h = 2\,\text{m}$, si los incrementos de r y h son $\Delta r = 0.01\,\text{m},\ \Delta h = 0.02\,\text{m}$ respectivamente *(julio 2012)*.

5.– A partir de lo estudiado para las series de potencias de la forma $\sum a_n x^n$, razona cómo se obtendrían el radio y el campo de convergencia de las series $\sum a_n (x - b)^n$ *(julio 2012)*.

Curso 12/13

6.– Sea la función $f(x, y)$, diferenciable.

a) Escribe la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$ y la expresión de la diferencial de la función en el mismo punto.

b) ¿Qué relación hay entre la df en P y el incremento de f respecto a su valor en P?

c) ¿Qué relación hay entre la diferencial de f en P y el plano tangente a $z = f(x, y)$ en P? *(junio 2013).*

7.– Como aplicación de lo visto en series de potencias y números complejos, se pide:

a) Escribir la expresión del desarrollo en serie de la función e^x (no es preciso deducirla).

b) Hacer $x = \theta i$ y obtener los 6 primeros términos de la serie.

c) Obtener, a partir del apartado b), la fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ *(junio 2013).*

8.– Una pieza metálica cilíndrica sufre un aumento de longitud de 1 cm/s, manteniendo constante su volumen de $400\pi\,\mathrm{cm}^3$. Se pide obtener:

a) La relación entre las velocidades a las que varían el radio r de la base y la longitud l.

b) La velocidad a la que varía r cuando la longitud de la pieza es de 100 cm *(julio 2013).*

Curso 13/14

9.– Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$. Utilizando el método habitual para extremos en varias variables, obtendríamos que f posee un mínimo absoluto en el punto $P(1, 2)$.
Sea ahora la condición de ligadura $g(x, y) = x + y - 1 = 0$. Aplicando el método de Lagrange, concluiríamos que posee un mínimo condicionado en $Q(0, 1)$, donde z alcanza el valor 2.
Se pide resolver ambos problemas mediante consideraciones geométricas, sin utilizar los métodos de cálculo de extremos *(junio 2014).*

10.– Sea la serie funcional $\sum(x^2 + 1)^n$. Determina su campo de convergencia utilizando el método seguido en el teorema de Cauchy-Hadamard *(junio 2014).*

11.– Halla el lugar geométrico de los complejos $z = x + yi$ tales que los afijos de z y de su inverso estén en la misma recta vertical *(junio 2014).*

12.– Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, sabemos que, si $\sum b_n$ converge y es mayorante de $\sum a_n$, ésta también converge. A partir de la propiedad anterior y de la definición de límite, se pide demostrar que, si el cociente a_n/b_n tiende a cero y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ también lo hace *(julio 2014).*

13.– Sea una función f de varias variables con un punto crítico en $\vec{x} = \vec{a}$. Si $d^2 f(\vec{a})$ es semidefinida, se trata de un caso dudoso, es decir que puede haber extremo o no haberlo. Pero podemos asegurar que, si $d^2 f$ es semidefinida positiva, en $\vec{x} = \vec{a}$ no existe máximo y si es semidefinida negativa, no existe mínimo. Razona la primera afirmación *(julio 2014).*

Curso 14/15

14.– Sea $P_5(z)$ un polinomio de coeficientes reales y grado 5. Razona qué podemos afirmar del número y tipo de sus raices *(junio 2015)*.

15.– Dada la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, obtén su gradiente en $P(2,1)$, así como la ecuación de la curva de nivel que pasa por P. ¿Qué relación hay –en P– entre $\vec{\nabla} f$ y la curva? *(junio 2015)*

16.– Dado el infinitésimo a_n, ¿qué podemos afirmar del carácter de estas series? *(julio 2015)*.

$$\textbf{a)}\ \sum a_n, \quad \textbf{b)}\ \sum a_n^2, \quad \textbf{c)}\ \sum \frac{1}{a_n}, \quad \textbf{d)}\ \sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$$

17.– Sea $z = \rho e^{\theta i}$. Escribe la expresión de e^z. ¿Cuántas soluciones existen y por qué? Particulariza para el caso $\rho = 2$, $\theta = \pi/4$ *(julio 2015)*.

Curso 15/16

18.– Sea una sucesión $\{a_n\}$, convergente. Razona si $\sum a_n$ es convergente *(junio 2016)*.

19.– En el intervalo $I = [1,2]$ se define $f_n(x) = (n^2 x)^{-1}$. Se pide estudiar la convergencia uniforme de la sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ y de la serie funcional $\sum f_n(x)$ *(junio 2016)*.

20.– Sean los complejos no nulos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Se pide obtener la condición necesaria y suficiente para que sea real el cociente z_1/z_2 *(junio 2016)*.

21.– Define convergencia y divergencia absoluta; y convergencia y divergencia incondicional. Demuestra que una serie incondicionalmente divergente es absolutamente divergente. Pon un ejemplo de serie absolutamente divergente que converja, justificando ambas características. ¿De qué tipo será la convergencia? *(julio 2016)*.

Curso 16/17

22.– Sea f una función real de 2 variables, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Demuestra que, si el determinante $|H|_P$ es positivo, la forma cuadrática $d^2 f$ en P es definida *(junio 2017)*.

23.– Determina razonadamente el campo de convergencia de la serie siguiente *(junio 2017)*.

$$\sum \frac{(x-2)^{2n}}{n^4\, 4^n}$$

24.– Sea z un complejo no real de módulo unidad. Demuestra que el complejo z_1 es imaginario puro *(junio 2017)*.

$$z_1 = \frac{1+z}{1-z}$$

25.– Sea $\mathcal{C} = (-r, r)$. Sea $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. Sea $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$.

a) ¿Cuándo decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$?

b) Si f admite desarrollo en serie en $\mathcal{C}$, ¿cuántas veces será derivable y por qué?

c) ¿Cuántos términos del desarrollo necesitamos en general para evaluar exactamente la función en un punto $x_0 \in \mathcal{C}$? ¿Por qué?

d) Pon un ejemplo de función para la que necesitemos sólo 3 términos del desarrollo para conocer el valor exacto de f en un punto *(julio 2017)*.

26.– Halla el lugar geométrico de los afijos de los complejos cuyo inverso coincida con su conjugado *(julio 2017)*.

Curso 17/18

27.– Sea $f(x, y)$ una función real de dos variables, de la que queremos saber si es diferenciable en un punto $P(a, b)$ de su dominio. Nos dicen que f cumple en P la condición necesaria de diferenciabilidad, pero no la suficiente.

a) Enuncia la condición necesaria. ¿Qué deducimos de que f la cumpla?

b) Enuncia la condición suficiente. ¿Qué deducimos de que f no la cumpla?

c) ¿Qué condición utilizaremos para saber si f es diferenciable en P? *(junio 2018)*.

28.– Dados dos complejos en forma trigonométrica, obtén razonadamente el módulo y el argumento de su producto *(junio 2018)*.

29.– Sea f una función real de 3 variables, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Demuestra que, si el determinante hessiano en P es negativo, en dicho punto puede haber un máximo o un punto de silla, pero no un mínimo *(julio 2018)*.

30.– Resuelve la ecuación $z^4 - 1 = 0,\ z \in \mathbb{C}$ y describe la figura geométrica que forman los afijos de las soluciones de la ecuación *(julio 2018)*.

Curso 18/19

31.– Se consideran la serie de potencias y la función siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,; \qquad f(x) = \frac{1}{1-x},\ \forall x \neq 1$$

Razona si la serie es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$, $\forall x \neq 1$ *(junio 2019)*.

32.– Sea la ecuación $z^n - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué podemos afirmar del número de sus raíces y la posición de los afijos de las mismas? ¿Cuántas de ellas serán reales? *(junio 2019).*

33.– Sea la función $f(x, y)$, diferenciable en un dominio D. Razona si $\vec{\nabla} f_P = 0$ es condición necesaria para que exista un extremo de f en $P \in D$ *(julio 2019).*

34.– Sea la sucesión funcional de término general $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$, definida en $I = [0, 1]$. Razona la verdad o falsedad de la afirmación: "la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en I a una función constante" *(julio 2019)*

.

Curso 19/20

35.– Sea f la función signo. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) f es integrable en todo $\mathbb{R}$.

b) Dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\exists F \,/\, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, siendo F primitiva de f *(junio 2020).*

36.– Pon un ejemplo de series que cumplan las condiciones siguientes, justificando que las cumplen o razonando que no es posible *(junio 2020).*

a) Oscilante, absolutamente convergente.

b) Oscilante, absolutamente divergente.

c) Convergente absolutamente oscilante.

37.– Sea $f(x, y, z, t)$, $f \in C^2$. Sea P un punto crítico. Si $|H|_P > 0$, razona la existencia y tipo de extremos de f en P *(junio 2020).*

38.– Razona si se puede utilizar la regla de Barrow para obtener la integral de las funciones seno y tangente en el intervalo $[0, \pi]$, calculándola en caso afirmativo *(julio 2020).*

39.– Sea la sucesión nula $\{a_n\}$, que cumple $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ y $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $\forall n$. Razona qué podemos afirmar del carácter de las series $\sum a_n$ y $\sum |a_n|$. Pon ejemplos *(julio 2020).*

40.– Sea $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia r. Se pide obtener su campo de convergencia y la relación entre los campos de convergencia de la serie y de su serie derivada, así como entre las funciones suma de la serie y de su serie derivada *(julio 2020).*

41.– Sea la figura formada por los afijos de los complejos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = 2+i$. Multiplicamos cada uno de ellos por $z = 1 + \sqrt{3}\, i$, obteniendo los complejos z_1', z_2' y z_3' respectivamente. Sin obtener estos últimos, razona qué forma tendrá la figura formada por los afijos de z_1', z_2' y z_3' y cuánto valdrá su perímetro *(julio 2020).*

Curso 20/21

42.– Sea $f(x) = |x|$. Razona si f tiene primitiva y obtenla, en caso afirmativo *(junio 2021)*.

43.– Calcula las derivadas parciales de la función $f(x, y) = \ln y \; e^{\sqrt{x}\,\operatorname{sen} xy}$ *(junio 2021)*.

44.– Obtén el desarrollo en serie de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, sin usar la fórmula de Taylor *(junio 2021)*.

45.– Halla una función f, continua en $[a, b]$, que no tenga primitiva. En caso de no existir tal función, razona por qué y encuentra una primitiva para cualquier f continua *(julio 2021)*.

46.– Se considera un recipiente cilíndrico lleno de agua de dimensiones interiores $r = 1\,\text{m}$, $h = 2\,\text{m}$. En un instante dado el radio empieza a aumentar a un ritmo constante de $0.1\,\text{m/s}$, manteniendose la forma cilíndrica y el volumen de agua retenido. ¿A qué velocidad descenderá la superficie del agua al cabo de 10 segundos? *(julio 2021)*.

Curso 21/22

47.– Pon un ejemplo razonado –o justifica que no existe– de función:

a) Integrable, pero no derivable.

b) Derivable, pero no integrable *(junio 2022)*.

48.– Suponiendo conocida la suma de la serie de los inversos de los cuadrados de los naturales, se pide calcular la suma de la serie de los inversos de los cuadrados de los impares *(junio 2022)*.

49.– Obtén razonadamente el campo de convergencia de la serie siguiente *(junio 2022)*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+1)^n}$$

50.– Sea f una función integrable en $I = [a, b]$, tal que $f(x) < 0$, $\forall x \in I$. Averigua la relación que existe entre las expresiones siguientes *(julio 2022)*.

$$\int_a^b |f(x)|\; dx \;; \quad \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

(La integral del valor absoluto y el valor absoluto de la integral).

51.– Sea $A = \sum a_n$ una serie de términos positivos. Razona qué podemos afirmar de la convergencia y de la suma (en su caso) de la serie B, de término general $b_n = a_n - a_{n+1}$. ¿Es condición necesaria para la convergencia de la serie B que a_n tienda a 0 cuando $n \to \infty$? *(julio 2022)*.

Curso 22/23

52.– Considera la curva $y = 1/x^2$. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por la curva y el eje x, para valores de x mayores o iguales que 1. Explica el sentido de la frase "La región $\mathcal{R}$ tiene perímetro infinito, pero área finita" y calcula el valor de dicha área *(junio 2023)*.

53.– Sea una función f de varias variables, $f \in C^2$, con un punto crítico en $\vec{x} = \vec{a}$. Utilizando el desarrollo de Taylor, se pide justificar brevemente lo siguiente:

a) Si $d^2 f$ en $\vec{x} = \vec{a}$ es una forma cuadrática definida, existe un extremo en $\vec{x} = \vec{a}$.

b) Si $d^2 f$ en $\vec{x} = \vec{a}$ es una forma cuadrática semidefinida, se trata de un caso dudoso.

c) Si $d^2 f$ en $\vec{x} = \vec{a}$ es una forma cuadrática semidefinida positiva, podemos asegurar que no existe máximo en $\vec{x} = \vec{a}$ *(junio 2023)*.

54.– Sea f una función diferenciable y sea P un punto de su dominio D. Si nos movemos desde el punto P a otro $P' \in D$, f tomará el valor $f(P')$, que puede ser mayor igual o menor que $f(P)$. ¿Cómo debemos movernos a partir del punto P para que el crecimiento de f sea el más rápido posible? Justifica la respuesta y obtén el valor de dicho crecimiento *(julio 2023)*.

55.– Sin utilizar los criterios de la raiz ni del cociente, obtén razonadamente el carácter de las series siguientes *(julio 2023)*.

$$\mathbf{a})\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n ; \qquad \mathbf{b})\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n} ; \qquad \mathbf{c})\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$

Curso 23/24

56.– Sea k un número entero e i la unidad imaginaria. Calcula la suma siguiente, según los valores de k *(junio 2024)*.

$$S(k) = i^{k+1} + i^{k+3} + i^{k+5} + i^{k+7}$$

57.– Sea la función $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$. Razona la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "el máximo valor de su derivada direccional en $(0, 0)$ es igual a 2 y se alcanza para la dirección positiva del eje OX" *(junio 2024)*.

58.– Consideramos la serie siguiente:

$$1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Para sumarla, podemos tomar una suma parcial de $3n$ términos y obtener su límite. Pero, al actuar así, no estamos tomando una suma parcial cualquiera. Razona el motivo por el que el método es válido y aplícalo al cálculo de la suma de la serie propuesta *(junio 2024)*.

59.– Identifica el término general de la serie siguiente y estudia su carácter *(julio 2024)*.

$$1+2+\frac{9}{4}+2+\frac{25}{16}+\frac{9}{8}+\dots$$

60.– Demuestra que f es continua en $P(0,0)$ y tiene derivadas parciales en P *(julio 2024)*.

$$f(x,y)=\begin{cases} x\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

61.– Si x es un número real positivo, la suma de sus dos raíces cuadradas vale 0 y su producto vale $-x$. Demuestra que, si z es un complejo no nulo, a sus raíces cuadradas les ocurre lo mismo, es decir, se cumple: $z_1+z_2=0\,;\ z_1\cdot z_2=-z$ *(julio 2024)*.

Curso 24/25

62.– Razona la verdad o falsedad de: "La función parte entera tiene infinitas discontinuidades de salto por lo que no tiene primitiva en ningún intervalo de $\mathbb{R}$" *(junio 2025)*.

63.– Sin utilizar los criterios del cociente ni de la raiz n-ésima, obtén razonadamente el campo de convergencia y la suma de las tres series siguientes *(junio 2025)*.

$$\mathbf{a})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,;\quad \mathbf{b})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n\,x^{n-1}\,;\quad \mathbf{c})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

64.– Sea una serie numérica $\sum a_n$, siendo $a_n\geq 0$. Razona si es condición necesaria y suficiente de convergencia que la sucesión de sumas parciales esté acotada *(julio 2025)*.

65.– Sea $f(x,y)=e^{3xy^2}$. Calcula, en $P(1,\sqrt{2})$, las derivadas siguientes *(julio 2025)*.

$$\mathbf{a})\,\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\,;\qquad \mathbf{b})\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

66.– Razona la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "Sea z un complejo no nulo. Dependiendo del valor de z, el número de sus raíces cúbicas reales puede ser cero, uno o dos" *(julio 2025)*.

7.2. Soluciones a las cuestiones

1.–

a) Falsa. La función $E(x)$ no es continua, pero sí continua a trozos y monótona creciente, que son dos de las condiciones suficientes de integrabilidad de una función.

b) Verdadera. Es consecuencia del primer teorema fundamental del Cálculo. Según éste, si f es continua en $I = [a, b]$, su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en I y se cumple $F'(x) = f(x)$. Luego toda función continua tiene primitiva, su función integral $F(x)$.

2.–

a) La función integral de f se obtiene como:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt = -\cos x|_0^x = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$$

El teorema afirma que, si f es integrable en $I = [a, b]$, su función integral F es continua en I. Y, si f es continua, F es derivable y se cumple $F' = f$. En efecto, $(1 - \cos x)' = \operatorname{sen} x$.

b) Las áreas encerradas entre la curva y el eje OX, entre el origen y los valores dados de la abscisa, vendrán dadas por:

$$S_1 = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2};\quad S_2 = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3.– Según el teorema fundamental del Álgebra, todo polinomio de coeficientes reales y grado n tiene n raíces (reales o complejas) de modo que, si existe una raíz compleja, existe su conjugada. Por tanto, si $P_n(x)$ tiene raíces complejas no reales, su número es siempre par. Entonces:

- Si n es impar, como el número de raíces complejas es par (o nulo), habrá un número impar de raíces reales, comprendido entre 1 (como mínimo) y n (como máximo).

- Si n es par, no tiene por qué haber ningún par de raíces complejas conjugadas: pueden ser todas reales. Ejemplo: $P_2(x) = x^2 - 3x + 2$, de raíces 1 y 2.

Así pues, la primera parte de la afirmación es verdadera y la segunda falsa.

4.– Las expresiones del volumen del cilindro descrito y de sus derivadas parciales son:

$$V = \pi r^2 h;\quad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h;\quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

El incremento del valor de una función de variables r y h, cuando r se incrementa en dr y h en dh, viene dado aproximadamente por la diferencial de la función. Entonces:

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.01 + \pi \cdot 1^2 \cdot 0.02 = 0.06\pi\ \mathrm{m}^3$$

Nota. El incremento real de volumen es $\Delta V = \pi\left[(1.01)^2 \cdot 2.02 - 1^2 \cdot 2\right] = 0.060602\pi\ \mathrm{m}^3$ y el error cometido en la aproximación, $0.000602\pi\ \mathrm{m}^3$ ($< 1\,\%$ del valor real del incremento).

5.– Siguiendo el método utilizado para las series $\sum a_n x^n$ en la demostración del teorema de Cauchy-Hadamard, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-b)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x-b| = l\,|x-b| \quad \begin{cases} < 1 & \text{converge} \\ > 1 & \text{no converge} \\ = 1 & \text{dudoso} \end{cases}$$

La serie converge absolutamente si $l\,|x-b| < 1$ o, lo que es lo mismo, si se cumple:

$$|x-b| < \frac{1}{l} \Longleftrightarrow -\frac{1}{l} < x-b < \frac{1}{l} \Longleftrightarrow b-\frac{1}{l} < x < b+\frac{1}{l}$$

El radio de convergencia, igual que en el caso $\sum a_n x^n$, vale $r = \begin{cases} 1/l & \text{si } l \neq 0,\ l \neq \infty \\ 0 & \text{si } l = \infty \\ \infty & \text{si } l = 0 \end{cases}$

El campo de convergencia, centrado ahora en $x = b$, toma una de estas cuatro formas:

$$(b-r, b+r),\ (b-r, b+r],\ [b-r, b+r),\ [b-r, b+r]$$

donde, haciendo $b = 0$, obtenemos los resultados del caso $\sum a_n x^n$.

En los extremos, $x = b \pm r$, hay que comprobar si existe convergencia sustituyendo en la serie.

6.–

a) Ecuación del plano tangente por el punto P:

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

Diferencial de la función en P:

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,dy$$

b) Si f es diferenciable, su diferencial es un infinitésimo equivalente a Δf; es decir, la diferencial en un punto aproxima el incremento del valor de la función cuando estamos muy cerca del punto, siendo la diferencia entre ambos un infinitésimo de orden superior.

c) Comparando ambas expresiones obtenemos una interpretación geométrica de la diferencial: vemos que la diferencial de la función en un punto representa el incremento de la coordenada z del plano tangente cuando nos movemos desde el punto $P(a,b)$ al $P'(a+dx, b+dy)$.

7.–

a) Desarrollo de $f(x) = e^x$:

$$f^{(n}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n}(0) = 1 \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) Hacemos $x = \theta i$ y calculamos sus sucesivas potencias para obtener los términos pedidos:

$$\frac{(\theta i)^0}{0!} = 1;\quad \frac{(\theta i)^1}{1!} = \theta i;\quad \frac{(\theta i)^2}{2!} = -\frac{\theta^2}{2!};\quad \frac{(\theta i)^3}{3!} = -\frac{\theta^3 i}{3!};\quad \frac{(\theta i)^4}{4!} = \frac{\theta^4}{4!};\quad \frac{(\theta i)^5}{5!} = \frac{\theta^5 i}{5!}$$

c) Fórmula de Euler. En los términos de exponente impar sacamos i factor común y agrupamos términos pares e impares, descomponiendo el desarrollo en los dos que buscamos:

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3 i}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5 i}{5!} - \cdots = \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)}_{\operatorname{sen}\theta}$$

8.– El cilindro tiene un volumen constante de $V = \pi r^2 l = 400\pi\,\mathrm{cm}^3$, siendo r el radio de la base y l la longitud. Las velocidades a las que varían ambas variables son:

$$\frac{dl}{dt} = 1\,\mathrm{cm/s}\,(\text{variación de la longitud})\,;\ \frac{dr}{dt}\ (\text{variación del radio, incógnita})$$

a) Relación entre las velocidades. Al ser V constante, su derivada es nula, con lo que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial l}\frac{dl}{dt} = 2\pi r l\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dl}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{\pi r^2}{2\pi r l}\frac{dl}{dt} = -\frac{r}{2l}\frac{dl}{dt}$$

b) Velocidad a la que varía r. Si $l = 100\,\mathrm{cm}$,obtenemos r: $\pi r^2 100 = 400\pi \Longrightarrow r = 2\,\mathrm{cm}$.

Sustituyendo: $\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{l=100} = -\dfrac{2}{2\cdot 100}\dfrac{dl}{dt} = -0.01\,\mathrm{cm/s}$.

Lógicamente, al aumentar la longitud con volumen constante, el radio disminuye.

9.– Observamos que la expresión de $f(x, y)$ es de primer grado en z y de segundo en x e y, por lo que –sumando y restando las cantidades adecuadas y simplificando– podemos escribirla como:

$$z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

Se trata de un paraboloide de revolución de vértice $P(1, 2)$, por lo que tiene un mínimo en P.
En la segunda parte, la interpretación geométrica de la condición consiste en cortar el paraboloide por el plano vertical $x + y - 1 = 0$. Sustituyendo $y = 1 - x$ en la expresión de z, resulta la parábola $z = 2x^2 + 2$. El valor mínimo de z se alcanza, lógicamente, en $x = 0$.

10.– Calculamos la raiz n-ésima del valor absoluto del término general, resultando $l = |x^2 + 1| = x^2 + 1$. Según el criterio de la raiz, la serie converge si:

$$x^2 + 1 < 1 \Longrightarrow x^2 < 0$$

lo que no se cumple para ningún valor de x, pues $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. En el caso dudoso

$$x^2 + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0,$$

se trata de la serie $\sum 1^n$, divergente. Para cualquier otro valor de x, resulta:

$$x^2 + 1 > 1 \Longrightarrow \left(x^2 + 1\right)^n \to +\infty$$

por lo que la serie diverge. Así pues, el campo de convergencia es $\mathcal{C} = \phi$.

Nota. Podemos también observar que se trata de una serie de términos positivos. cuyo término general no tiende a 0. La serie no converge, luego diverge y su campo de convergencia es vacío.

11.– Calculamos el inverso de cualquier $z \neq 0$:

$$z = x + yi \Longrightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i$$

De la condición del enunciado se deduce que z y z^{-1} tienen la misma parte real. Entonces:

$$x = \frac{x}{x^2 + y^2} \Longleftrightarrow x(x^2 + y^2) = x \Longleftrightarrow x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (con $y \neq 0$, pues $z \neq 0$) y $x^2 + y^2 = 1$. Es decir, el eje y excluido el origen y la circunferencia de centro el origen y radio unidad.

12.– Aplicamos la definición de límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \left| \frac{a_m}{b_m} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

Por ser $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos, $\left|\frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{a_m}{b_m} < \varepsilon \Rightarrow a_m < \varepsilon\, b_m\ \forall m \geq n$.

Lo anterior significa que $\sum a_n$ es minorante de $\sum (\varepsilon\, b_n)$. Entonces, si $\sum b_n$ converge, $\sum(\varepsilon\, b_n) = \varepsilon \sum b_n$ también converge, por lo que su minorante $\sum a_n$ lo hace también.

13.– Que $d^2 f$ sea semidefinida positiva en un punto significa que, en dicho punto, $d^2 f \geq 0\ \forall d\vec{x} \neq \vec{0}$ ($d^2 f$ ha ser mayor que 0 para algún $d\vec{x}$).

Por otra parte, en un punto crítico $\vec{x} = \vec{a}$, el signo del Δf entre $\vec{x} = \vec{a}$ y $\vec{x} = \vec{a} + d\vec{x}$ viene dado por el signo de $d^2 f$, si ésta no es nula. Luego, si $d^2 f$ es semidefinida positiva, el incremento de la función, a partir de su valor en $\vec{x} = \vec{a}$, será positivo al menos en una dirección.

La función tiene un máximo en $\vec{a}$ si existe un entorno de $\vec{a}$, tal que la función decrece al desplazarnos desde $\vec{a}$ a cualquier punto del entorno; es decir $\Delta f \leq 0$. Por tanto, si $d^2 f$ es semidefinida positiva, en alguna dirección $\Delta f > 0$ y no puede haber máximo en $\vec{a}$.

14.– Según el teorema fundamental del Álgebra, un polinomio $P_5(x)$ de coeficientes reales tiene 5 raíces, reales o complejas conjugadas. Como el número de raíces complejas no reales es par, en caso de existir alguna, se cumplirá lo siguiente (véase la cuestión **3**):

- Habrá 0, 2 ó 4 raíces complejas no reales (número par o nulo).
- El número de raíces reales, por diferencia con lo anterior, será: 5, 3 ó 1.

Es decir, pueden darse tres casos: 5 raíces reales; 3 raíces reales y 2 complejas conjugadas; 1 raiz real y 4 complejas (conjugadas dos a dos).

15.–

a) El gradiente de f tiene como componentes las derivadas parciales de la función, es decir:

$$\vec{\nabla}^t f = (2x, 4y)\,|_P = (4, 4)$$

b) Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos en los que la función toma un mismo valor. En $P(2,1)$ la función vale $f(2,1) = 2^2 + 2 \cdot 1^2 = 6$. Luego la ecuación de la curva de nivel que pasa por P será $f(x,y) = x^2 + 2y^2 = 6$.

c) La dirección de $\vec{\nabla} f$ es la de máxima variación de f a partir de su valor en P, mientras que la dirección perpendicular a $\vec{\nabla} f$ es la de variación nula de f. Como f no varía a lo largo de la curva de nivel que pasa por P, en ese punto el gradiente será perpendicular a la curva.

16.–

a) Como a_n es un infinitésimo, tiene límite 0, por lo que se cumple la condición necesaria (no suficiente) de convergencia. Luego $\sum a_n$ puede ser convergente, divergente u oscilante.

b) Si $a_n \to 0 \Rightarrow a_n^2 \to 0$, por lo que se cumple la condición necesaria de convergencia. Como $a_n^2 \geq 0, \forall n$, se trata de una serie de términos positivos, por lo que será convergente o divergente (una serie de términos positivos no puede ser oscilante).

c) Si $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ diverge (no tiene por qué tender a $\pm\infty$). Entonces no cumple la condición necesaria de convergencia, por lo que no converge: será entonces divergente u oscilante.

d) Si $a_n \to 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$, por lo que no cumple la condición necesaria de convergencia. Como $\left|\frac{1}{a_n}\right| \geq 0 \ \forall n$, la serie es de términos positivos, luego diverge a $+\infty$ (apdo. **b**).

17.–

a) $z = \rho\, e^{\theta i} = \rho\cos\theta + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\, i = x + yi$.

Entonces $e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{sen}\, y\, i) = e^{\rho\cos\theta}\,[\cos(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)]$.

b) A partir de la definición de exponencial compleja, la solución de esta operación es única: el complejo de módulo $e^{\rho\cos\theta}$ y argumento $\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$.

c) Si $\rho = 2, \theta = \pi/4$, entonces $\rho\cos\theta = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $e^z = e^{\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2} + \mathrm{sen}\,\sqrt{2}\, i\right)$.

18.– No tiene por qué. Que $\{a_n\}$ converja significa que su límite l es finito; y la condición necesaria para la convergencia de $\sum a_n$ es que $a_n \to 0$, por lo que la serie sólo podrá converger si $l = 0$. Pero, aunque se cumpla esta condición, tampoco podemos asegurar la convergencia de la serie: por ejemplo, la armónica $\sum \frac{1}{n}$ es divergente, aunque su término general tiende a 0.

19.–

a) Como $\forall x \in I$, se cumple $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, podemos afirmar que la sucesión funcional $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función límite $f(x) = 0$.

La condición para que la convergencia sea uniforme es que la distancia entre f_m y f puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando un m suficientemente alto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \,/\, d\,(f_m, f) < \varepsilon, \forall m \geq n,$$

lo que equivale a decir que la distancia entre f_m y f tiende a cero, cuando $m \to \infty$.

La distancia entre f_m y f se obtiene como:

$$d\,(f_m, f) = \sup |f_m(x) - f(x)|_{x\in I} = \sup \left|\frac{1}{m^2 x} - 0\right|_{x\in I} = \frac{1}{m^2} \quad \text{(se alcanza en } x = 1\text{)}.$$

Si $m \to \infty \Longrightarrow \dfrac{1}{m^2} \to 0$, luego la convergencia es uniforme $\left(m > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \dfrac{1}{m^2} < \varepsilon\right)$.

b) El criterio de Weierstrass afirma que "si $\sum |f_n(x)|$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos convergente, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en I".

Se cumple $\dfrac{1}{n^2 x} \leq \dfrac{1}{n^2}, \forall x \in I$, por lo que $\sum |f_n|$ tiene como mayorante a $\sum \dfrac{1}{n^2}$, serie de Rieman con $\alpha > 1$, por tanto convergente. Luego $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en I.

20.– Al ser z_2 no nulo, el cociente pedido vale:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}$$

que será real si y sólo si su parte imaginaria es nula, es decir $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} = 0 \Longleftrightarrow bc - ad = 0.$

21.–

a) Definiciones: 1) La serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente (divergente) si y sólo si $\sum |a_n|$ es convergente (divergente). 2) La serie es incondicionalmente convergente o divergente si y sólo si al reordenar sus términos no varía el caracter (ni la suma si converge).

b) Demostración: "$\sum a_n$ incondicionalmente divergente $\Rightarrow \sum a_n$ absolutamente divergente".

Lo hacemos por reducción al absurdo. Sea $\sum a_n$ incondicionalmente divergente. Si no es absolutamente divergente, será absolutamente convergente, pues $|a_n| \geq 0\, \forall a_n \in \mathbb{R}$ y una serie de términos positivos nunca oscila. Entonces será incondicionalmente convergente (teorema de Dirichlet), con lo que llegamos a una contradicción.

c) Ejemplo: La serie $\sum (-1)^n \dfrac{1}{n}$ es absolutamente divergente ($\sum |a_n| = \sum \dfrac{1}{n}$ es la serie armónica). Pero converge, pues cumple las condiciones del teorema de Leibnitz (alternada, de términos decrecientes en valor absoluto y con $a_n \to 0$). La convergencia asegurada por el teorema se verifica en el orden dado; es decir, la serie es condicionalmente convergente.

22.– Si $f \in C^2$, las derivadas cruzadas coinciden. Por tanto, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ no puede ser nula: si lo fuera, su determinante valdría:

$$|\mathrm{H}| = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \leq 0$$

lo que contradice el enunciado. Aplicando el criterio de Sylvester, resulta:

1) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ y $|\mathrm{H}| > 0 \Longrightarrow d^2 f$ es definida positiva.

2) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ y $|\mathrm{H}| > 0 \Longrightarrow d^2 f$ es definida negativa.

23.– Aplicamos el criterio de la raiz $n-$ésima al valor absoluto del término general:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)^2}{4} \sqrt[n]{n^4} = \frac{(x-2)^2}{4}$$

$$l < 1 \Longrightarrow \frac{|x-2|}{2} < 1 \Longrightarrow -2 < x-2 < 2 \Longrightarrow 0 < x < 4$$

Resulta el intervalo $(0, 4)$. Estudiamos sus extremos:

1) $x = 0 \Longrightarrow \sum \dfrac{(-2)^{2n}}{n^4 4^n} = \sum \dfrac{1}{n^4}$, serie de Riemann con $\alpha = 4 > 1 \Longrightarrow$ convergente.

2) $x = 4 \Longrightarrow \sum \dfrac{(2)^{2n}}{n^4 4^n} = \sum \dfrac{1}{n^4}$, idem al caso anterior.

Así pues, el campo de convergencia es $\mathcal{C} = [0, 4]$.

24.– Que $z = a + bi$ sea un complejo no real significa que su parte imaginaria es no nula. Se cumple: $|z|^2 = a^2 + b^2 = 1;\ b \neq 0$. Entonces:

$$z_1 = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+bi}{1-a-bi} = \frac{(1+a)+bi}{(1-a)-bi} \cdot \frac{(1-a)+bi}{(1-a)+bi} = \cdots = \frac{1-a^2-b^2+2bi}{1+a^2-2a+b^2} = \frac{b}{1-a}\, i$$

El complejo z_1 existe siempre, pues $a \neq 1$. Si $a = 1$, como $b = \sqrt{1-a^2}$, b sería nulo, contra lo que afirma el enunciado. Entonces z_1 es un número imaginario puro.

25.–

a) Decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$ si y sólo si su suma coincide con el valor de f en $\mathcal{C}$: $\sum a_n x^n = f(x),\ \forall x \in \mathcal{C}$.

b) Si f tiene desarrollo en serie, entonces $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$, por lo que f admite derivadas de cualquier orden, ya que $(a_n x^n)' = n a_n\, x^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, f es derivable tantas veces como se quiera. En este caso se dice que $f \in C^\infty$.

c) El valor de $f(x)$ en cada $x \in \mathcal{C}$ es la suma del desarrollo para ese valor de x. Por lo tanto, en general necesitamos todos los términos del desarrollo, es decir infinitos. Tomando un número finito de términos, obtendríamos sólo una aproximación del valor exacto de f.

d) Ejemplo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, que cumple: $f(0) = c,\ f'(0) = b,\ f''(0) = 2a$. Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n} x^n}{n!} = c + \frac{bx}{1!} + \frac{2ax^2}{2!} + 0 + 0 + \cdots = ax^2 + bx + c$$

26.– Cumplirán la condición los complejos $z = x + yi$, no nulos, tales que:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \overline{z} \Longrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Longrightarrow |z|^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar geométrico pedido es la circunferencia de centro el origen y radio 1.

27.–

a) Condición necesaria: "Si f es diferenciable en P, tiene derivadas direccionales en ese punto según cualquier dirección y se cumple: $D_{\vec{\omega}} f_P = \vec{\nabla} f_P \cdot \vec{\omega},\ \forall \vec{\omega} \,/\, |\vec{\omega}| = 1$".

Si f cumple la C.N., puede ser diferenciable en P, pero no podemos asegurarlo.

b) Condición suficiente: Si f tiene derivadas parciales en un entorno de P y son continuas en ese punto, entonces f es diferenciable en P.

Si f no cumple la C.S., no podemos asegurar que sea diferenciable en P, pero podría serlo.

c) El enunciado nos dice que f puede ser diferenciable, pero no lo asegura, por lo que usaremos la condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad de f en el punto $\vec{a}$, es decir:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = df(\vec{a}) + o(\vec{x} - \vec{a})$$

Haciendo $\vec{x} = (x, y),\ \vec{a} = (a, b),\ \vec{x} - \vec{a} = (x - a, y - b) = (h, k),\ df = \left(hf'_x + kf'_y\right)$, la condición, escrita en forma de límite, es:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf'_x(a,b) - kf'_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

28.– Sean z_1 y z_2 en forma trigonométrica: $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1),\ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. Calculando su producto, obtenemos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2\right] \\ &= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + i\left(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2\right)\right] \\ &= \rho_1\rho_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\theta_1+\theta_2\right)\right] \end{aligned}$$

Resulta un complejo de módulo el producto de módulos y de argumento la suma de argumentos.

29.– Si $f \in C^2$, las derivadas cruzadas son iguales, luego el hessiano es simétrico y puede diagonalizarse por congruencia. Es decir, existe una matriz $\mathrm{C}\ /\ |\mathrm{C}| \neq 0$, que cumple:

$$\mathrm{C\,H\,C^T = D} \Longrightarrow |\mathrm{C}|\,|\mathrm{H}|\left|\mathrm{C^T}\right| = |\mathrm{C}|^2\,|\mathrm{H}| = |\mathrm{D}|$$

con lo que $|\mathrm{H}|$ y $|\mathrm{D}|$ tienen el mismo signo. Como $|\mathrm{H}| < 0, \Longrightarrow |\mathrm{D}| = d_1\,d_2\,d_3 < 0$, luego ningún d_i es nulo y deben ser negativos uno de ellos o los tres. Entonces:

- Si uno de los d_i es negativo y los otros dos positivos, la d^2f es indefinida y no hay extremo.
- Si los tres d_i son negativos, la d^2f es definida negativa y hay un máximo.

Por lo tanto, puede haber máximo o punto de silla, pero no puede haber un mínimo.

30.– Las soluciones de la ecuación son las raices cuartas de la unidad. Se obtienen como sigue:

$$z^4 = 1 = 1 \cdot e^{0i} \Longrightarrow z = \rho e^{\theta i}\ /\ \rho = \sqrt[4]{1} = 1,\ \theta = \frac{0 + 2k\pi}{4} = k\,\frac{\pi}{2},\ k = 0, 1, 2, 3$$

Obtenemos los complejos siguientes: $e^{0i} = 1\,,\ e^{\frac{\pi}{2}i} = i\,,\ e^{\pi i} = -1\,,\ e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$. Sus afijos forman un cuadrado de centro el origen, con dos vértices en el eje real y dos en el imaginario.

31.– Decimos que la serie $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de la función f en $\mathcal{C}$ si y sólo si su suma coincide con el valor de f en $\mathcal{C}$.

La serie considerada es geométrica de razón x, por lo que converge para $|x| < 1$ y su suma vale $S = (1-x)^{-1} = f(x)$. Es decir, la suma de la serie coincide con el valor de la función, pero sólo en el intervalo $\mathcal{C} = (-1, 1)$.

Fuera de $\mathcal{C}$, la función existe (salvo en $x = 1$), pero su valor no coincide con la suma de la serie (que no converge). Así pues, $\sum a_n x^n$ no es el desarrollo de $f(x)\ \forall x \neq 1$.

32.– La solución de la ecuación es $z = \sqrt[n]{1}$, es decir el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad. Sabemos que todo complejo de módulo $\rho \neq 0$ tiene n raíces n-ésimas, cuyos afijos están equiespaciados en una circunferencia de radio $\rho^{1/n}$, por lo que son los vértices de un polígono regular de n lados.

Como $\rho = 1$, la circunferencia tiene radio $r = 1$ y corta al eje real en $z = \pm 1$. Si n es par, ambos valores satisfacen la ecuación, luego existen dos raíces reales. Si n es impar, sólo $z = 1$ satisface la ecuación, luego existe sólo una raiz real.

33.– La condición necesaria de gradiente nulo se deduce para una función que posee un extremo en un punto P interior a su dominio D, siendo f diferenciable en P. De este modo, los posibles extremos estarán en puntos que cumplan las condiciones anteriores o en puntos no estudiados aún, es decir:

1) Puntos interiores de D, que cumplan $\vec{\nabla} f_P = \vec{0}$.

2) Puntos frontera del dominio.

3) Puntos del dominio en los que f no es diferenciable.

En el caso planteado, al no existir puntos de D en que f no es diferenciable y ser P un punto cualquiera de D, el extremo podría estar en la frontera y no tiene por qué cumplirse $\vec{\nabla} f_P = \vec{0}$. Luego no es condición necesaria de extremo.

Ejemplo: la función $f(x, y) = x + y$, definida en $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big/\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2\big\}$.

Esta función corresponde a un plano, en un dominio cuadrado. Alcanza su valor máximo en $P(2, 2)$, que pertenece a la frontera, y su gradiente en P es el vector $(1, 1)$.

34.– Lo estudiamos en dos partes:

1. Límite puntual. Si $x \in [0, 1)$, $x^n \to 0$, cuando $n \to \infty$. Si $x = 1$, $x^n = 1 \,\forall n$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} (1+0)^0 = 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ (1+1)^0 = 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   Luego $f_n(x)$ converge simple o puntualmente a $f(x) = 1$ (función constante).

2. Convergencia uniforme. Calculamos $d(f_n, f)$ y vemos si tiende a 0, cuando $n \to \infty$:

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in I} \left| \sqrt[n]{1 + x^n} - 1 \right| = \sqrt[n]{1 + 1^n} - 1 = \sqrt[n]{2} - 1$$

   Como $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt[n]{2} - 1\big) = (1 - 1) = 0$, la convergencia es uniforme y la afirmación es cierta.

35.–

a) Verdadera. La función cumple dos condiciones suficientes de integrabilidad:

a.1. Vale -1 para $x < 0$, 0 para $x = 0$, $+1$ para $x > 0$, luego es monótona creciente.

a.2. Tiene sólo una discontinuidad en $x = 0$, con límites laterales finitos, luego es continua a trozos.

b) Falsa. Al ser f integrable, existe su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Entonces:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0; \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

por lo que la primera parte de la afirmación es verdadera. Sin embargo, como f tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, no tendrá primitiva en ningún intervalo que contenga al origen. Luego la afirmación es falsa.

36.–

a) Oscilante, absolutamente convergente: no existe. Si una serie es absolutamente convergente, será incondicionalmente convergente (T. de Dirichlet), luego no puede ser oscilante.

b) Oscilante, absolutamente divergente: $\sum a_n = 1-1+1-1+\ldots$, cuyas sumas parciales valen 0 ó 1, según n sea par o impar, por lo que es oscilante. Sin embargo, $\sum |a_n| = 1+1+1+1+\ldots$ diverge, por lo que $\sum a_n$ es absolutamente divergente.

c) Convergente, absolutamente oscilante: no existe, pues una serie no puede ser absolutamente oscilante. En efecto, $|a_n|$ es una serie de términos positivos por lo que será convergente o divergente, nunca oscilante.

37.– Al ser $f \in C^2$, las derivadas segundas cruzadas son iguales, por lo que la matriz hessiana H_P es simétrica y puede diagonalizarse por congruencia, es decir:

$$\exists\, C \,/\, CHC^T = D \Longrightarrow |C|\,|H|\,\left|C^T\right| = |D| \Longrightarrow |C|^2\,|H| = |D|$$

luego los signos de $|H|$ y $|D|$ coinciden. Como $|H| > 0 \Longrightarrow |D| = d_1\, d_2\, d_3\, d_4 > 0$, siendo $d_{i,\,i=1,2,3,4}$ los elementos de la diagonal. Entonces el número de elementos negativos debe ser par o nulo y tenemos tres opciones:

a) Son positivos los cuatro, luego H es definida positiva y existe un mínimo en P.

b) Son negativos los cuatro, luego H es definida negativa y existe un máximo en P.

c) Dos son positivos y otros dos negativos, luego H es indefinida y en P hay un punto de silla.

Así pues, en P puede haber mínimo, máximo o punto de silla.

38.– La regla de Barrow dice: "si f es continua y g primitiva suya, $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$".

a) Se puede aplicar a la función seno, pues ésta es continua en $\mathbb{R}$.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

b) No se puede aplicar a la función tangente, pues no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

39.– A partir de las condiciones del enunciado, de la sucesión $\{a_n\}$ sabemos: a) que cumple $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; b) que sus términos son decrecientes en valor absoluto; 3) que cada término tiene el signo contrario al del anterior. Entonces:

a) La serie $\sum a_n$ cumple las condiciones del teorema de Leibnitz, por lo que converge. Un ejemplo es la armónica alternada $\sum (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

b) La serie $\sum |a_n|$ es de términos positivos, por lo que no puede ser oscilante. Cumple la condición necesaria de convergencia, luego puede converger, pero también diverger. Ejemplos:

- Si $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, $\sum |a_n|$ es la serie armónica, divergente.

- Si $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum |a_n|$ es la serie de Rieman $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Como $\alpha = 2 > 1$, es convergente.

40.– A partir del teorema de Cauchy-Hadamard, si una serie de potencias tiene un radio de convergencia r, su campo de convergencia contendrá los valores de x entre $-r$ y $+r$, incluyendo los extremos o no. Por tanto tomará una de las siguientes cuatro formas:

$$[-r, r], \quad [-r, r), \quad (-r, r], \quad (-r, r)$$

Si derivamos una serie de potencias, el radio de convergencia se mantiene, pero el campo no tiene por qué hacerlo. Luego hay que comprobar la convergencia para los valores extremos $x = \pm r$.
De igual modo, si la suma de la serie $\sum a_n x^n$ es $S(x)$ en su campo de convergencia, la suma de la serie derivada $\sum n a_n x^{n-1}$ será $S'(x)$ en $(-r, r)$ (no conocemos la suma en los extremos).

41.– Dibujando los afijos de z_1, z_2, z_3 observamos que forman un triángulo rectángulo isósceles, de perímetro $P = 2 + 2\sqrt{2}$. Sabemos que, al multiplicar por z los complejos cuyos afijos forman una figura geométrica, las dimensiones de la figura se multiplican por $|z|$.
Como $|z|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, la figura formada por los afijos de z_1', z_2', z_3' será un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados tendrán longitud doble que en la figura original. Por tanto, el perímetro pedido valdrá $P' = 2P = 4 + 4\sqrt{2}$.

42.– La función $y = |x|$ es continua, luego tiene primitiva por el primer teorema fundamental del Cálculo. Podemos definirla como:

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Entonces:

1. Si $x \geq 0$, $\displaystyle\int |x| \; dx = \int x \; dx = \frac{1}{2}x^2 + k_1$.
2. Si $x < 0$, $\displaystyle\int |x| \; dx = \int (-x) \; dx = -\frac{1}{2}x^2 + k_2$.

En todo $\mathbb{R}$, la función está definida y es continua, por lo que su primitiva existe y es derivable, luego es continua. Exigiendo continuidad en $x = 0$ (punto frontera de los dos intervalos de definición)

$$\left.\frac{x^2}{2} + k_1\right|_{x=0} = \left.-\frac{x^2}{2} + k_2\right|_{x=0} \Longrightarrow k_1 = k_2$$

La primitiva es:

$$\int |x| \ dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + k, & x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + k, & x < 0 \end{cases}$$

43.–

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y \; e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,xy} \left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \,\mathrm{sen}\, xy + \sqrt{x}\, y \cos xy \right]$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y} \; e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,xy} + \ln y \; e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,xy} \sqrt{x}\, x \cos xy = e^{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,xy} \left[\dfrac{1}{y} + \ln y \, x^{3/2} \cos xy \right]$

44.– Para obtener el desarrollo de f sin usar la fórmula de Taylor, derivamos la función, calculamos el desarrollo de la derivada e integramos dicho desarrollo.

1. $f(x) = \arctan x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. Podemos obtener el desarrollo de f' dividiendo directamente o bien observando que coincide con la suma de la serie geométrica de razón $\lambda = -x^2$ (que es convergente si $|x| < 1$):

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

3. El desarrollo de $f(x)$ se obtiene integrando el desarrollo de $f'(x)$:

$$f(x) = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

El desarrollo pedido es:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

45.– No existe ninguna función continua que no tenga primitiva. Se justifica a partir del primer teorema fundamental del Cálculo. Es decir:

1. Toda función f, continua en $I = [a, b]$ es integrable en I (es una de las condiciones suficientes de integrabilidad).
2. Para toda f integrable, definimos su función integral $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
3. Se demuestra que $F(x)$ es derivable y su derivada $F'(x) = f(x)$.

Así pues, podemos asegurar que $\forall f$ continua, su función integral $F(x)$ es primitiva suya.

46.– Calculamos la derivada respecto al tiempo de $V(r,h)$ y la igualamos a 0, por ser el volumen constante). De ahí despejamos la derivada de h (sabemos que r no puede ser nulo pues valía 1 metro y está aumentando):

$$V=\pi r^2 h \Longrightarrow \frac{dV}{dt}=\pi 2r\frac{\partial r}{\partial t}h+\pi r^2\frac{\partial h}{\partial t}=0\Longrightarrow \frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{2\pi r h}{\pi r^2}\frac{\partial r}{\partial t}=-\frac{2h}{r}\frac{\partial r}{\partial t}$$

Calculamos r y h a los 10 segundos:

$$r_{10}=r_0+10\cdot 0.1=2\,;\quad h_{10}=\frac{V}{\pi r_{10}^2}=\frac{\pi 1^2\cdot 2}{\pi\, 2^2}=0.5$$

Obtenemos la velocidad de descenso de la superficie del agua:

$$u_{sup}=\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{2\cdot 0.5}{2}\,0.1=-0.05\,\mathrm{m/s}$$

47.–

a) Si f es monótona, es integrable. Y si f es discontinua, no es derivable. Entonces, sirve como ejemplo una función monótona discontinua, como $E(x)$.

b) Si f es derivable, es continua. Si f es continua, es integrable. Luego no existe ninguna función derivable, pero no integrable.

48.– Se trata de una serie de Riemann con $\alpha=2>1$, luego converge a un cierto valor S. Al ser de términos positivos, converge absolutamente, luego converge incondicionalmente.

Al ser incondicionalmente convergente, podemos separarla en dos subseries, la de los inversos de los cuadrados de los impares y la de los pares, despejando la primera de ellas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

Sacando fuera el factor común de los denominadores en la serie de los pares, calculamos la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\,S$$

49.– Es una serie de términos positivos $\forall x$. Estudiamos su convergencia con el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(x^2+1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=l$$

Si $l<1$, la serie converge; si $l>1$, diverge; y si $l=1$ es caso dudoso. Entonces:

a) $\dfrac{1}{x^2+1}<1\Longleftrightarrow 1<1+x^2\Longleftrightarrow x^2>0$, que se cumple $\forall x\neq 0$.

b) $\dfrac{1}{x^2+1}>1\Longleftrightarrow 1>1+x^2\Longleftrightarrow x^2<0$, que no se cumple para ningún valor de x.

c) $\dfrac{1}{x^2+1} = 1 \iff 1 = 1 + x^2 \iff x^2 = 0$, que se cumple para $x = 0$.

En este caso, la serie se convierte en $\sum n$, que es divergente.

Así pues, la serie converge $\forall x \neq 0$ y diverge para $x = 0$. Luego $\mathcal{C} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

50.– Sea $I_a^b = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Por el proceso seguido en la deducción de la integral de Riemann, sabemos que, si f tiene signo constante en el intervalo, la integral I_a^b nos da el área A_a^b delimitada por la curva y OX entre a y b (si $f > 0$) o el valor opuesto $-A_a^b$ (si $f < 0$).

En nuestro caso $f < 0$, por lo que $|f| = -f$. Entonces:

1. $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| = \left|I_a^b\right| \overset{f\leq 0}{=} \left|-A_a^b\right| = A_a^b.$
2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b \Big(-f(x)\Big)dx = -\int_a^b f(x)dx = -I_a^b = A_a^b.$

Por tanto, la relación es de igualdad. La integral del valor absoluto coincide con el valor absoluto de la integral.

51.– Calculamos el valor de una suma parcial de la serie B:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_4}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

La serie B será convergente si y sólo si S_n tiene límite finito S, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = S \in \mathbb{R}$$

lo que equivale a:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - S = k \in \mathbb{R}$$

Es decir, la serie B converge a S si y sólo si a_n tiene límite finito k, en cuyo caso la suma S valdrá $S = a_1 - k$. Luego no es necesario que $a_n \to 0$ $\big($que es la condición necesaria de convergencia de la serie $\sum a_n\big)$.

Lógicamente, la serie $\sum b_n$ cumple la condición necesaria de convergencia. En efecto, si $a_n \to k$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = k - k = 0$$

Por ejemplo, la serie $\sum \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ no converge, pues su término general tiende a 1. Pero la serie obtenida a partir de ella sí lo hace:

$$\sum (a_n - a_{n+1}) = \sum \left(1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

que tiene igual carácter que la serie de Riemann con $\alpha = 2 > 1$, convergente.

52.– La curva es simétrica respecto al eje OY y consideramos sólo la parte $x \geq 1$. Si $x \to \infty$, entonces $1/x^2 \to 0$, por lo que el eje OX es una asíntota horizontal. Como la curva y el eje no llegan a tocarse, la región $\mathcal{R}$ no se cierra y podemos decir que su perímetro es infinito.

Para obtener el área de la región, planteamos la integral de la función entre $x = 1$ y $x = a$ y calculamos su límite cuando $a \to \infty$.

$$A_{\mathcal{R}} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a} + 1\right) = 1$$

Como este límite vale 1, decimos que el área de la región es finita.

53.– Escribimos los 3 primeros términos del desarrollo de Taylor de f en $\vec{a}$, llamando $d\vec{x}$ a $\vec{x} - \vec{a}$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot d\vec{x} + \frac{1}{2!} d\vec{x}^{\,t} \underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}}\, d\vec{x} + \dots$$

Pasando $f(\vec{a})$ al otro lado, a la izquierda queda $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$, es decir, el incremento Δf.
Al ser $\vec{x} = \vec{a}$ un punto crítico, $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$, luego $\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot d\vec{x} = 0$.
También observamos que $d\vec{x}^{\,t} \underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}}\, d\vec{x} = d^2 f(\vec{a})$ y los siguientes sumandos son infinitésimos de orden superior (despreciables frente a $d\vec{x}$, si $\vec{x}$ está muy próximo a $\vec{a}$). Entonces la expresión inicial se reduce a:

$$\Delta f = d^2 f(\vec{a}) + \dots$$

Vemos, pues, que $d^2 f(\vec{a})$ nos da la parte principal (y, por tanto, el signo) del infinitésimo Δf, al pasar de $\vec{a}$ a $\vec{x}$ (siempre que $d^2 f(\vec{a}) \neq 0$). Ahora podemos justificar las tres afirmaciones:

1. Si la forma cuadrática es definida positiva, eso significa que $d^2 f(\vec{a}) > 0$ para cualquier $d\vec{x}$ por lo que $\Delta f > 0$ al movernos desde el punto $\vec{a}$ en cualquier dirección. Entonces la función crece siempre a partir de su valor en $\vec{a}$, luego en dicho punto hay un mínimo.

   Si la forma cuadrática es definida negativa, $d^2 f(\vec{a}) < 0$, $\forall d\vec{x} \implies \Delta f < 0$. Entonces la función decrece siempre al movernos desde $\vec{a}$, por lo que en el punto $\vec{a}$ hay un máximo.

2. Si la forma cuadrática es semidefinida, $d^2 f(\vec{a}) \geq 0$ o $d^2 f(\vec{a}) \leq 0$, dependiendo de $d\vec{x}$. Entonces $d^2 f(\vec{a}) = 0$ para algún $d\vec{x}$, en cuyo caso el signo de Δf lo darán los siguientes términos del desarrollo, por lo que no hay solución única y decimos que es un caso dudoso.

3. En el caso particular de que $d^2 f(\vec{a})$ sea semidefinida positiva, significa que existe algún $d\vec{x}$ para el que $d^2 f(\vec{a}) > 0$, por lo que $\Delta f > 0$. Esto significa que, para algún $d\vec{x}$, la función crece, luego en $\vec{x} = \vec{a}$ no puede haber un máximo (puede haber mínimo o punto de silla).

54.– Debemos movernos en la dirección y sentido de su vector gradiente $\vec{\nabla} f(P)$. Lo justificamos en el caso de 2 ó 3 variables.
Si una función es diferenciable, su derivada con respecto a la dirección dada por $\vec{\omega}$ (unitario) es:

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{\omega}$$

En 2 ó 3 variables, el producto escalar de dos vectores se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Entonces, al ser $\vec{\omega}$ unitario,

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \|\vec{\nabla} f(P)\|\, \|\vec{\omega}\| \cos\varphi = \|\vec{\nabla} f(P)\| \cos\varphi$$

Este producto será máximo si $\cos\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$. Así pues, la variación de f será la más rápida posible en la dirección y sentido del vector gradiente, es decir, según el unitario:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\nabla} f(P)}{\|\vec{\nabla} f(P)\|}$$

Para obtener el valor de este crecimiento, calculamos la derivada según la dirección de $\vec{\omega}$:

$$D_{\vec{\omega}} f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{\omega} = \vec{\nabla} f(P) \cdot \frac{\vec{\nabla} f(P)}{\|\vec{\nabla} f(P)\|} = \frac{\|\vec{\nabla} f(P)\|^2}{\|\vec{\nabla} f(P)\|} = \|\vec{\nabla} f(P)\|$$

El máximo ritmo (o tasa) de crecimiento viene dado por el módulo del vector gradiente.

55.–

a) La serie es geométrica de razón $\dfrac{e}{\pi} < 1$, por tanto convergente.

b) Por la equivalencia entre un infinitésimo θ_n y el seno de θ_n, el término general $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ es equivalente a $\dfrac{1}{n}$, luego la serie tiene el mismo carácter que la armónica (divergente).

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\ln n < n$, por lo que $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ $(\forall n > 1)$, luego la serie es mayorante de la armónica, por tanto divergente.

56.– Sacamos factor común i^k:

$$S(k) = i^{k+1} + i^{k+3} + i^{k+5} + i^{k+7} = i^k \left(i + i^3 + i^5 + i^7\right)$$

Estudiamos los sumandos del paréntesis:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \quad ; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \quad ; \quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

Con lo que $S(k)$ resulta:

$$S(k) = i^k(i - i + i - i) = i^k \cdot 0 = 0$$

Nota. El factor i^k, que no afecta al resultado, toma sólo cuatro posibles valores.

a) Si $k > 0$, i^k vale $1,\ i,\ -1,\ -i,$ según k sea, respectivamente, $\dot{4},\ \dot{4}+1,\ \dot{4}+2,\ \dot{4}+3$.

b) Si $k < 0$, hacemos $i^k = i^{-|k|} = 1/i^{|k|}$, obteniendo los inversos de los cuatro posibles valores anteriores. Es decir, i^k vale $1,\ -i,\ -1,\ i,$ según $|k|$ sea $\dot{4},\ \dot{4}+1,\ \dot{4}+2,\ \dot{4}+3$.

57.– Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y - e^y \operatorname{sen} x\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + e^y \cos x$$

que son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, luego f es diferenciable. Obtenemos el vector gradiente en el origen y, a partir de él, la derivada direccional en ese punto:

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}_{(0,0)} = (0,2) \Longrightarrow D_{\vec{\omega}} f(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{\omega} = (0,2) \cdot (\omega_x, \omega_y) = 2\omega_y$$

El valor máximo de esta derivada se obtendrá cuando ω_y valga 1, es decir $\vec{\omega} = (0,1)$, que es el vector unitario de la dirección positiva del eje y; no la del eje x, como dice el enunciado.

Así pues, la primera parte de la afirmación es cierta, pero la segunda es falsa.

Nota. Se podría también haber razonado recordando que la dirección de crecimiento más rápido de una función es la del vector gradiente. Y que la derivada de f según esa dirección vale $\|\vec{\nabla} f\|$ (véase la cuestión **54**).
En nuestro caso, el valor máximo de la derivada direccional vendrá dado por $\|(0,2)\| = 2$, mientras que la dirección corresponderá a la del vector unitario de $\vec{\nabla} f$, es decir $(0,1)$.

58.– A la hora de elegir el número de términos de una suma parcial encontramos tres opciones: $3n$, $3n+1$ o $3n+2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir, un número de términos múltiplo de 3, o múltiplo de tres más 1 o múltiplo de 3 más 2 (obviamente, múltiplo de 3 más 3 vuelve a ser múltiplo de 3).
Esas tres posibles sumas parciales se relacionan de la siguiente forma:

$$S_{3n+1} = S_{3n} + a_{3n+1}\,; \quad S_{3n+2} = S_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}$$

Los términos de la serie son inversos de los naturales, por lo que cumplen $\lim_{m\to\infty} a_m = 0$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{3n} + a_{3n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{3n} + \lim_{n\to\infty} a_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} (S_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = \lim_{n\to\infty} S_{3n} + \lim_{n\to\infty} a_{3n+1} + \lim_{n\to\infty} a_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} S_{3n}$$

Así pues, tenga o no límite la suma parcial S_{3n}, a las sumas S_{3n+1} y S_{3n+2} les ocurre lo mismo. Es decir, las tres tienen igual límite o las tres carecen de él.

Cálculo de la suma. Si tomamos $3n$ términos, es decir n grupos de 3, obtendremos los n primeros sumandos de la armónica (con signo +) y los $2n$ primeros (con signo –). Entonces:

$$S_{3n} = H_n - H_{2n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n - (\ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) = \cancel{\ln n} + \gamma + \varepsilon_n - (\ln 2 + \cancel{\ln n} + \gamma + \varepsilon_{2n})$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} (\varepsilon_n - \ln 2 - \varepsilon_{2n}) = 0 - \ln 2 + 0 \Longrightarrow S = -\ln 2$$

59.– Observando los sucesivos términos, los dos primeros sugieren que $a_n = n$, lo que no concuerda con el tercero. Descomponiendo éste en factores obtenemos $a_3 = 3^2/2^2$. El cuarto no nos da mucha información. El quinto, descompuesto, queda $a_5 = 5^2/2^4$, luego, igual que el tercero, sigue la ley $n^2/2^{n-1}$. Probando esta ley con los demás términos, resulta:

$$a_1 = \frac{1^2}{2^0} = 1\,; \quad a_2 = \frac{2^2}{2^1} = 2\,; \quad a_4 = \frac{4^2}{2^3} = 2\,; \quad a_6 = \frac{6^2}{2^5} = \frac{9}{8}$$

lo que nos permite concluir que el término general de la serie es $a_n = \dfrac{n^2}{2^{n-1}}$.

Aplicando el criterio de la Raíz –y el límite de la raíz n-ésima de un polinomio– obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \text{convergente}$$

60.–

a) La forma más directa de estudiar la continuidad en el origen es utilizar coordenadas polares: $x = 0+\rho\cos\theta\,;\ y = 0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$. Para calcular el límite de f cuando $(x,y)\to(0,0)$ siguiendo cualquier camino, hacemos que $\rho\to 0$, dejando libre θ:

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \lim_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

El factor $\rho\to 0$, mientras que tanto el coseno como el seno están acotados, luego el producto de los tres tiende a 0. Entonces:

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0 = f(0,0)$$

por lo que la función es continua en el origen.

b) Calculamos las derivadas parciales en el origen:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{k}-0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

pues el seno está acotado. Así pues, las derivadas parciales en el origen existen y son nulas.

61.– Sea $z = \rho e^{\theta i}$. A partir de la fórmula de la raíz $n-$ésima:

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0,1\ldots n-1$$

sus raíces cuadradas serán: $z_1 = \rho^{1/2}\, e^{\frac{\theta}{2}\,i}$, $z_2 = \rho^{1/2}\, e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)i}$

Ambas tienen igual módulo y sus argumentos se diferencian en π radianes, luego corresponden a complejos opuestos, de donde se obtiene la primera expresión:

$$z_2 = -z_1 \Longrightarrow z_1 + z_2 = 0$$

Para obtener la segunda, basta sustituir $z_2 = -z_1$ en el producto:

$$z_2 = -z_1 \Longrightarrow z_1\, z_2 = z_1(-z_1) = -z_1^2 = -z$$

Esto último puede también resolverse recordando que el producto de complejos tiene de módulo el producto de módulos y de argumento la suma de argumentos:

$$z_1\, z_2 = \rho^{1/2}\,\rho^{1/2}\, e^{\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}+\pi\right)i} = \rho\, e^{(\theta+\pi)i} = -z$$

62.– Por el primer teorema fundamental del Cálculo, toda función continua tiene primitiva, que es su función integral F; y, si una función tiene una discontinuidad de salto en un intervalo, no puede tener primitiva en ese intervalo.

La función $E(x)$ tiene una discontinuidad de salto en los valores enteros de x, pero es continua en todo intervalo entre dos enteros consecutivos, luego tiene primitiva en esos (infinitos) intervalos.

Como consecuencia, aunque $E(x)$ tiene infinitas discontinuidades de salto, es falso que no tenga primitiva en ningún intervalo, por lo que la afirmación es falsa.

63.– Para resolver la cuestión observamos que la primera serie es geométrica y las otras dos son respectivamente su serie derivada y su serie primitiva.

a) La serie de término general $(-1)^n\, x^n$ es geométrica de razón $\lambda = -x$, por lo que converge si $|\lambda| = |x| < 1$, luego el radio de convergencia es $r = 1$.

Estudiando los extremos del campo de convergencia, para $x = 1$ la serie es $1-1+1-1+\ldots$, oscilante; mientras que, en $x = -1$, se convierte en $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$, divergente.

Así pues, su campo de convergencia es $\mathcal{C} = (-1, 1)$. Su función suma es la de una serie geométrica de razón $\lambda = -x$, es decir $S(x) = a_1/(1 - \lambda) = 1/(1 + x)$.

b) La serie de término general $(-1)^n n\, x^{n-1}$ es la derivada de la serie anterior, por lo que tiene el mismo radio de convergencia.

Estudiando los extremos, obtenemos, para $x = 1$, la serie $-1+2-3+4\ldots$ Como $a_n \not\to 0$, no converge (calculando la sucesión de sumas parciales, se demuestra que diverge). Para $x = -1$, la serie $-1 - 2 - 3 - 4\ldots$ diverge a $-\infty$.

Su campo de convergencia es, pues, $\mathcal{C} = (-1, 1)$. Su función suma se obtiene derivando la de la serie inicial: $S'(x) = -1/(1 + x)^2$.

c) La serie de término general $(-1)^n x^{n+1}/(n+1)$ es la primitiva de la serie de la que partimos, por lo que tiene el mismo radio de convergencia.

En los extremos resulta, para $x = 1$, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$, es decir la armónica alternada, que es convergente. Para $x = -1$, obtenemos $-1-1/2-1/3-1/4\ldots$, es decir, la opuesta de la armónica, divergente a $-\infty$.

El campo de convergencia es, pues, $\mathcal{C} = (-1, 1]$. Para calcular la función suma integramos la de la serie inicial, $S(x)$:

$$F(x) = \int_0^x S(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x)$$

64.– Al ser los términos de $\sum a_n$ no negativos, su sucesión de sumas parciales S_n es monótona creciente. Existen dos opciones: S_n está acotada superiormente o no lo está.

- Si está acotada, converge, por el teorema de las sucesiones monótonas.
- Si no está acotada, significa que puede superar cualquier valor, luego diverge; por tanto, no converge.

Puede también razonarse viendo que, si está acotada, converge; y, si converge, ha de estar acotada, pues –de lo contrario– divergería.

En conclusión, para una serie de términos positivos, estar acotada es condición necesaria y suficiente de convergencia.

65.–

a) Calculamos las primeras derivadas respecto a x, de las que deducimos la expresión general:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3xy^2}\, 3y^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{3xy^2}\, 3y^2\, 3y^2 = e^{3xy^2}(3y^2)^2; \ldots \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = e^{3xy^2}(3y^2)^n.$$

Particularizando para $x = 1, y = \sqrt{2}$, obtenemos $\left.\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_P = e^6\, 6^n$.

b) Derivamos respecto a y la derivada respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{3xy^2} 6xy\, 3y^2 + e^{3xy^2} 6y = e^{3xy^2}(18xy^3 + 6y).$$

Particularizando para $x = 1, y = \sqrt{2}$, obtenemos $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P = 42\sqrt{2}\, e^6$.

66.– Sea el complejo $z = \rho e^{\theta i}$. Sus raíces cúbicas toman los valores:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho e^{\theta i}} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{3} i} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3} i},\ k = 0, 1, 2$$

luego z tiene tres raíces complejas, de módulo $\rho^{1/3}$ y argumentos $\dfrac{\theta}{3}$, $\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{4\pi}{3}$.

Los afijos de estas tres raíces son los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen.

El complejo z puede ser real o no serlo. Analizamos las dos opciones:

a) Sea z real. Su argumento valdrá 0 (si $z > 0$) o π (si $z < 0$).

- Si $\theta = 0$, las tres raíces serán:

$$z_1 = \rho^{\frac{1}{3}};\quad z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2\pi}{3} i} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\quad z_3 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{4\pi}{3} i} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

  Es decir, una raiz real positiva y dos complejas conjugadas.

- Si $\theta = \pi$, las tres raíces serán:

$$z_1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{3} i} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\quad z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\pi i};\quad z_3 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{5\pi}{3} i} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

  Es decir, una raíz real negativa y dos complejas conjugadas.

  Así pues, si z es real, sólo una de las tres raíces será real, del mismo signo que z. El triángulo equilátero tendrá un vértice en el eje real y el lado opuesto a dicho vértice será vertical.

b) Sea z complejo no real, de argumento θ. En este caso, las tres raíces serán complejas no reales, con las expresiones vistas antes. Ninguna de ellas puede ser real. De ser, por ejemplo, $z_1 \in \mathbb{R}$, resultaría $z = (z_1)^3 \in \mathbb{R}$, contra la hipótesis.

En resumen, el número de raíces cúbicas reales de un complejo no nulo sólo puede ser 0 o 1, por lo que la afirmación es falsa.

Nota. Un razonamiento más breve es el siguiente: Un complejo tiene tres raíces cúbicas, de las que, en principio, pueden ser reales 0, 1, 2 o las 3. Entonces:

- Puede no haber ninguna. Por ejemplo $z = i \Longrightarrow z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$, $z_3 = -i$.
- Puede haber una. Por ejemplo $z = 1 \Longrightarrow z_1 = 1$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$.
- No puede haber dos. Al estar sus afijos a la misma distancia del origen, las raíces serían reales opuestos, por ejemplo $z_1 > 0, z_2 < 0$. Entonces $z = (z_1)^3 > 0$ y $z = (z_2)^3 < 0$.
- No puede haber tres. No existen tres puntos en el eje real a la misma distancia del origen.

7.3. Problemas de examen

Curso 10/11. Examen de junio

1.– Se considera la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\big(|x|+|y|\big)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \beta, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Halla la relación entre α y β para que existan $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en (0,0).

b) Estudia la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2.– Halla el campo de convergencia de la serie potencial $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\ln n}}$.

3.– Dadas las curvas: $f(x)=e^x,\ g(x)=|\operatorname{sen}x|,\ x=0,\ x=2\pi$, se pide:

a) Dibujar la región que delimitan y plantear su área mediante integrales definidas.

b) Calcular por integración el volumen que genera dicha región, al girar alrededor del eje OX.

Curso 10/11. Examen de julio

4.– Sea la función $f(x,y,z)$, dos veces diferenciable. Haciendo $x=ut,\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-t^2),\ z=v$, obtenemos la función compuesta $w(u,v,t)$. Se pide calcular el valor de:

$$E=f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}-\frac{1}{u^2+t^2}(w''_{uu}+w''_{tt})-w''_{vv}$$

5.– Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{a^{2n}},\ a>0$, se pide:

a) Hallar el campo de convergencia.

b) Calcular la suma de la serie.

6.– Se considera la región $\mathcal{R}$ del plano, delimitada por las curvas:

$$x^2+y^2=16,\ y=4-x^2,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

a) Dibuja la región y calcula su área.

b) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OX.

c) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OY.

Curso 11/12. Examen de junio

7.– Determina la relación que debe existir entre $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ para que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha |y|^\beta \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sea diferenciable en $(0,0)$.

8.– Sea la función $r(x,y) = f(3x+2y) + g(x-2y)$. Demuestra que se verifica:

$$4\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0$$

9.– Calcula la derivada n-ésima de $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Utiliza este resultado para obtener el desarrollo de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(1-x)^3}$.

10.– Sea la curva $\mathcal{C}:\ (y-1)^2 - x - 1 = 0$. Se considera el área A comprendida entre $\mathcal{C}$ y OY, así como el arco S de la curva, comprendido entre los puntos $P(0,0)$ y $Q(0,2)$. Se pide:

a) El volumen del cuerpo obtenido al girar A en torno a OX.

b) El área de la superficie generada al girar S en torno al eje $y = 1$.

Curso 11/12. Examen de julio

11.– Consideramos la función $z = v\, f(w)$, siendo f una función diferenciable. Además, $u = -2x + 2y$ y $v = 4x$, con $w = uv$. Obtén el valor máximo de la derivada direccional de z con respecto a x e y en el punto $P\,(x = 1/2,\, y = 1)$, sabiendo que $f(2) = 1$ y que $f'(2) = 1$.

12.– Sea la serie de término general $a_n = n^a \tan\dfrac{1}{n}$.

a) ¿Para qué valores de a se verifica la condición necesaria de convergencia?

b) ¿Para qué valores de a converge la serie anterior?

c) Estudia, para $a = \dfrac{1}{2}$, el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

13.– Sean a y b dos números reales distintos. Halla el lugar geométrico de los afijos de los complejos z que cumplen la condición: $|z-a| = |z-b|$.

14.– Obtén por integración el volumen limitado por la superficie $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$, que se encuentra por encima del plano XY.

Curso 12/13. Examen de junio

15.– Dada la función $w = x^3 f\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$, se pide:

a) Encontrar el valor de $E = x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}$.

b) Obtener $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

16.– Estudia, en función del parámetro $\lambda \neq 0$, el carácter de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\lambda^n}$.

17.– Sea el paraboloide elíptico de ecuación $z = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2}$.

a) Calcula el volumen comprendido entre el paraboloide y el plano horizontal.

b) Representa la curva intersección del paraboloide con el plano YZ. Obtén el área de la superficie generada al girar, en torno al eje z, la parte de dicha curva situada por encima del plano XY.

Curso 12/13. Examen de julio

18.– Sea el sistema:

$$\begin{cases} F(x,y,z,t) = e^{(x-z)} + yt + 3 = 0 \\ G(x,y,z,t) = e^{(y+t)} - xz = 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprobar que el sistema anterior define a z y a t como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x, y, z, t) = (1, 2, 1, -2)$.

b) Hallar el gradiente de $z = z(x, y)$ en el punto $(1, 2)$.

c) Hallar la derivada direccional de $t = t(x, y)$ en el punto $(1, 2)$ según la dirección del vector $\bar{u} = (1, 1)$.

19.– Dada la serie potencial $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{n-1} x^{n-1}$, se pide:

a) Hallar su campo de convergencia.

a) Calcular su suma cuando sea convergente.

20.– Sea $\mathcal{R}$ la región del plano limitada por la gráfica de la función $y = x^2 - x$ y el eje OX, entre $x = 0$ y $x = 2$. Se pide calcular el área de dicha región, así como los volúmenes que genera $\mathcal{R}$ cuando gira alrededor del eje OX y cuando gira alrededor del eje OY.

Curso 13/14. Examen de junio

21.– Se considera la ecuación $xe^x\,(y^2-2y)+g\,(2z+\operatorname{sen} z)=0$.

a) ¿Qué condiciones debe cumplir la función $g\,(2z+\operatorname{sen} z)$ para que la ecuación defina a $z=\phi(x,y)$ como función implícita de x e y, en un entorno del punto $P(x,y,z)=(0,3,0)$?

b) Comprueba que la función $g(u)=e^u-1$ verifica las condiciones anteriores. Para este caso, determina la derivada de $\phi(x,y)$ en $(0,3)$ según la dirección dada por la tangente a la curva $y=x^2+2x+3$ en el mismo punto.

22.– Se pide:

a) Estudiar el carácter de la serie numérica $\sum \dfrac{k^n(n^3+2n)}{4^n+2^n}$, $\quad k\in\mathbb{R}$.

b) Dada una serie convergente de términos positivos $\sum a_n$, estudiar el carácter de $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

23.– En el plano XY se considera el recinto $\mathcal{R}$ limitado por las curvas $C_1: x^2+y^2-1=0$ y $C_2: x+y^2-1=0$, en el semiplano $x\geq 0$. Se pide:

a) Dibujar el recinto $\mathcal{R}$ y calcular el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ en torno del eje y.

b) El giro anterior produce un sólido hueco. Plantea (sin resolver la integral) el cálculo del área de la superficie interior de dicho sólido.

Curso 13/14. Examen de julio

24.– Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\operatorname{sen} xy$. Se pide:

a) Definir la función f en los puntos de la forma $(0,b)$ para que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

b) Sabiendo que f es diferenciable en el punto $(1,\pi)$, encontrar en dicho punto la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$.

25.– Sea la serie funcional $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$, cuya suma vale $S(x)=\operatorname{sen}^2 x,\ \forall x\in(-r,r)$. Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$ en $(-r,r)$.

26.– Sea la región $\mathcal{R}$, limitada por las curvas $y=-x^2+5$ y $y=|x-1|$, siendo $x\geq 0$.

a) Calcula su área.

b) Plantea la expresión integral para calcular el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OX.

Curso 14/15. Examen de junio

27.– Halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x + y^2$ en el conjunto siguiente:

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2,\, y^2 - x \geq 0\right\}$$

28.– Sea la función $f(x) = \ln(1+x^3)$, cuyo desarrollo en serie de potencias es:

$$3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+3}}{3n+3}\,, \quad x \in (-1,1)$$

Justifica si dicho desarrollo es válido en los extremos del intervalo $(-1,1)$.

29.– Se considera el trazado del tranvía de una estación de montaña. La vía es rectilínea en planta, mientras que la cota de cada punto viene dada por la expresión $z = 0.2\,x^{1.5}$, siendo x la distancia horizontal en kilómetros desde el punto de salida del tranvía al punto de la curva considerado. La longitud de la vía en horizontal es 5 kilómetros. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el tranvía se desplaza (tanto en ascenso como en descenso) a una velocidad de 12 km/h, calcular el tiempo que emplea en realizar el recorrido de ascenso.

b) Si las ruedas del tranvía tienen un radio de 0.5 metros y ruedan sin deslizar sobre la vía, obtener el número de vueltas que da cada una durante el ascenso (se desprecia la longitud del tranvía).

Curso 14/15. Examen de julio

30.– Sea $z = f(x,y) = e^x \cos y$, donde x e y son las funciones de t definidas implícitamente por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^3 + e^x = t^2 + t + 1; \\ yt^2 + y^2 t + y - t = 0 \end{cases}$$

y tales que $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Obtén el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ en $t = 0$.

31.– Estudia la convergencia del siguiente desarrollo y obtener su función suma, si converge.

$$3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+3}}{3n+3}$$

32.– Un tranvía realiza un recorrido de ascenso a una montaña a una velocidad de 12 km/h en un tiempo de 30 minutos. Sus ruedas tienen un radio de $1/\pi$ metros, ruedan sin deslizar sobre los railes y la posición de cada punto del exterior de la rueda viene dado por las coordenadas (x_r, y_r) definidas por las ecuaciones:

$$x_r = \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\pi}; \quad y_r = \frac{1 - \cos\theta}{\pi}$$

siendo θ el ángulo de giro de la rueda respecto del punto de partida.
Se pide calcular por integración simple la distancia total recorrida por un punto exterior de una de las ruedas del tranvía. Se considera el recorrido rectilíneo tanto en planta como en alzado.

Curso 15/16. Examen de junio

33.– Dada la función $z = z(x, y) = x^y + f(y^x)$, calcula el valor de $E = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y \ln y \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

34.– Estudia la diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$, de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

35.– Calcula el radio y el campo y de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=30}^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{30}}}{(n+1)(n+2)\,3^n}(x-5)^n$$

36.– Sean las curvas de ecuaciones $C_1 : y = \dfrac{x^4}{3} + 3x^3 - 2x^2$ y $C_2 : y = 3x^3 + x^2$. Se pide:

a) Dibujar la región del plano encerrada entre ambas curvas para $x \geq 2$ y calcular su área.

b) Plantear la integral que permite calcular el volumen generado al hacer girar el área definida alrededor del eje OX.

c) Plantear la integral que permite calcular la superficie de revolución que se genera al hacer girar C_1 en torno al eje OY, entre $x = 2$ y $x = 5$.

Curso 15/16. Examen de julio

37.– Se sabe que el nivel de contaminación z de una zona de la costa depende principalmente del tráfico marítimo (número de barcos por unidad de tiempo, v) y de los vertidos en la costa (toneladas de vertidos por unidad de tiempo, u). Se ha comprobado que una estimación fiable del nivel de contaminación viene dado por la expresión $z = 2v + u\, g(u \cdot v)$, siendo g diferenciable.

Además, se sabe que u y v dependen de la altura media de ola (x), así como del número de horas de sol en la costa (y), según las expresiones $u(x, y) = 2y$, $v(x, y) = -x + 3y$..

Utilizando la derivada direccional, se pide determinar el valor máximo de la tasa de variación del nivel de contaminación en la costa, para los siguientes valores de las variables: $x = 2$, $y = 1$, $g(2) = 1$, $g'(2) = -1$.

38.– Estudia, en función de los parámetros $a > 0$ y $b > 0$, el carácter de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n \frac{1}{n}$$

39.– Se considera un cono recto de altura H y base circular de radio R. Se pide obtener por integración simple las expresiones de su volumen y su superficie lateral.

Curso 16/17. Examen de junio

40.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por la expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Se pide:

a) Estudiar para que valores del parámetro k la función es continua.

b) Estudiar para que valores del parámetro k las derivadas parciales son continuas en el $(0,0)$.

c) Estudiar para que valores del parámetro k la función es diferenciable en el $(0,0)$.

41.– Estudia la convergencia del desarrollo siguiente y obtén la función suma, si converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

42.– Se considera la región plana $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq |x|\}$.

a) Plantea el cálculo por integración del área de la región $\mathcal{R}$.

b) Plantea el cálculo por integración del volumen que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor del eje OY.

c) Calcula por integración la superficie que genera la frontera de $\mathcal{R}$ al girar alrededor de OX.

Curso 16/17. Examen de julio

43.– La temperatura de una placa viene dada por la función $T(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x^2y^2}$.

a) ¿En qué dirección tendremos que desplazarnos desde el punto $(1,1)$ para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? Justifica la respuesta.

b) ¿En qué dirección, desde el mismo punto, la tasa de variación de la temperatura es de $\dfrac{1}{4}$?

c) Dada la curva en paramétricas $\vec{\varphi}(t) = (\cos t, 1+\operatorname{sen} t)$, calcula $(T \circ \vec{\varphi})'(0)$. ¿Qué representa dicho valor?

44.– Estudia el carácter de las siguientes series y, de ser posible, calcula su suma.

$$\textbf{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2n^2+n}.$$

45.– Considera la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

a) Plantea el cálculo por integración del perímetro de la elipse.

b) Calcula por integración el área de la región $\mathcal{R}$ limitada por la elipse.

c) Calcula por integración el volumen que genera dicha región al girar alrededor del eje OX.

Curso 17/18. Examen de junio

46.– Calcula los extremos de la función $f(x,y) = xy$, definida sobre la parte de la elipse de ecuación $2x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$, que verifica que $y \geq 0$.

47.– Estudia el carácter de las siguientes series de números reales:

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} \qquad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{a}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}$$

48.– Calcula el radio, campo de convergencia y función suma de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}$$

49.– Dados el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, se pide hallar por integración el volumen exterior al cilindro e interior a la esfera.

Curso 17/18. Examen de julio

50.– Demuestra que la función $z = xf(x^2 - y^3)$, siendo f diferenciable, satisface la ecuación:

$$3y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 z}{x}$$

Calcula la dirección de máximo crecimiento de z como función de x e y en el punto $P(1,1)$ sabiendo que $f(0) = f'(0) = 2$.

51.– Estudia el carácter de la siguiente serie y calcula su suma si converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 2n}{n!} \qquad \left(\text{Dato:} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\right)$$

52.– Estudia la convergencia puntual y uniforme en el intervalo $[0,1]$, de la sucesión funcional:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

53.– Calcula por integración el volumen del elipsoide de ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

Curso 18/19. Examen de junio

54.– Obtén, a través de la correspondiente función lagrangiana, los extremos de la función $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2$ que se encuentren en la recta $x + y = 0$.

55.– Estudia el carácter de las siguientes series y, de ser posible, calcula su suma.

$$\textbf{a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)} \qquad\qquad \textbf{b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n\ln n\ln(\ln n)}.$$

56.– El plano $z=0$ representa el suelo horizontal de una aldea esquimal. Sobre este suelo se construye un iglú, cuya superficie exterior viene dada por $x^2+y^2+3z=9, z\geq 0$, y su superficie interior por $x^2+y^2+z^2=4, z\geq 0$ (unidades en metros). El coste por m^3 del hielo ya colocado, $f(z)$, depende de la altura. Se pide, utilizando integración simple:

a) Calcular el volumen de hielo necesario para la construcción del iglú.

b) Plantear la expresión del coste de construcción del iglú.

Nota. No se consideran puertas ni ventanas.

Curso 18/19. Examen de julio

57.– Determina el punto en el que alcanza un extremo la derivada direccional de la función $f(x,y)=x^3+3y^3-x^2+y^2$, según la dirección del vector $(1,2)$. Averigua el tipo de extremo del que se trata, así como el valor de la derivada direccional en ese punto.

58.– Estudia el carácter de la siguiente serie en función del parámetro a.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(1+a)^n}\quad (a\neq -1)$$

Indica si hay algún valor de a para el cual la serie es condicionalmente convergente.

59.– Calcula el radio, campo de convergencia y función suma de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$$

60.– Calcula por integración simple la superficie y el volumen de la esfera de radio R.

Curso 19/20. Examen de junio

61.– Sea la ecuación $x^2+\ln x=\cos t-t$.

a) Justifica que esta ecuación define a x como función implícita de t, diferenciable en un entorno de $t=0$, $x=1$.

b) Sea ahora la ecuación $y^2t-e^t-yt+y=0$, que define a y como función implícita de t, diferenciable en un entorno de $t=0$, $y=1$ (no hace falta justificarlo). Obtén la derivada de y con respecto a t en $t=0$.

c) Se define la función $z = f(x, y) = \text{sen}(x\sqrt{y})$, siendo x e y las definidas en los apartados anteriores. Calcula la derivada de la función compuesta $z(t)$ respecto a t en el punto $t = 0$.

62.– Sea la serie:

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

Se pide estudiar la convergencia y -si converge- obtener la suma, indicando de qué tipo de convergencia se trata.

63.– Sean las curvas $C_1 : x^2 + y^2 - 2 = 0$, $y \geq 0$ y $C_2 : x^2 - y = 0$, que delimitan la región $\mathcal{R}$. Sean P y Q sus puntos de intersección. Se pide calcular:

a) El área de la región $\mathcal{R}$, dibujándola previamente.

b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ en torno al eje y.

c) La longitud del arco de C_1 comprendido entre P y Q.

d) El área de la superficie generada por el giro del arco anterior en torno al eje x.

Curso 19/20. Examen de julio

64.– De un cilindro de madera de diámetro $d = 1\,m.$ se obtiene una viga de sección rectangular de anchura x y altura y. La rigidez R de una viga rectangular es proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Obtén la función lagrangiana y halla, por el método de extremos condicionados, las dimensiones de la viga de máxima rigidez.

Nota. se sugiere maximizar el cociente entre R y la constante de proporcionalidad.

65.– Estudia el carácter de la serie:

$$\sum \frac{n^{3n}}{(2n)!}$$

66.– Se considera el arco $\mathcal{A}$ de ecuación:

$$2y - x^2 + \frac{1}{2}\ln x = 0 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

Se pide:

a) El área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

b) La longitud del arco.

c) El área de la superficie obtenida al girar $\mathcal{A}$ en torno al eje OY.

Curso 20/21. Examen de junio

67.– El carácter de cada una de las siguientes series se puede obtener por uno o más de los siguientes criterios: raíz, Raabe, logarítmico y condensación. Sabiendo que cada criterio puede utilizarse sólo una vez, asigna a cada una el más adecuado y obtén su carácter.

$$\textbf{a)}\sum \frac{1}{n\ln n}\,;\quad \textbf{b)}\sum \frac{1}{n^2}\,;\quad \textbf{c)}\sum \frac{1}{2^n}\,;\quad \textbf{d)}\sum \frac{e\,(e+1)(e+2)\dots(e+n)}{\pi(\pi+1)(\pi+2)\dots(\pi+n)}$$

68.– Calcula los extremos de la función $f(x,y,z)=x+z$, situados en la esfera de centro el origen y radio unidad. Justifica el tipo de extremo que resulte.

69.– Sea la función $f(x,y)=e^{x+y}$. Se pide obtener el desarrollo en serie de Taylor en torno al punto $(0,0)$.

70.– Sea un terreno horizontal, al que corresponde un valor nulo de la coordenada z. Se considera una esfera de radio $R=4\,\text{m}$ cuyo centro está $1\,\text{m}$ por encima del plano del terreno. Se pide:

a) Calcular por integración el volumen de la esfera que se encuentra bajo la superficie.

b) Deseamos excavar el volumen del apartado anterior. Si el coste de la extracción de tierra es $f(z)$, función de la profundidad en euros/m^3, plantea la expresión integral que nos da el coste de la excavación en euros.

Curso 20/21. Examen de julio

71.– Se pide el término general, el carácter y la suma (si convergen), de las series cuyos términos son los inversos de los cuadrados de: **a)** Los pares; **b)** Los impares. Dato: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

72.– Obtén la suma y el campo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

73.– Calcula los extremos relativos de la función f, justificando el tipo de extremo que resulte.

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}$$

74.– Sea la curva de ecuación $y=|\operatorname{sen} nx|\,,\ n\in\mathbb{N}$. Se pide:

a) El área limitada por la curva y el eje x, entre $x=0$ y $x=\pi$, para $n=1$.

b) El área limitada por la curva y el eje x, entre $x=0$ y $x=\pi$, para n cualquiera.

c) El volumen obtenido al girar en torno a OX el área plana del apartado **b)**.

Curso 21/22. Examen de junio

75.– Se pide obtener:

a) El desarrollo de Taylor de segundo orden en torno al $(0,0)$, de $f(x,y) = x\cos y + y\,\mathrm{sen}\,x$.

b) Un valor aproximado de la expresión $A = 0.2\cos(0.1) + 0.1\,\mathrm{sen}(0.2)$, indicando el error relativo cometido (considera como valor exacto $A = 0.2188$).

76.– Sean cuatro números reales positivos de suma 20. Demuestra que la suma de sus cubos vale como mínimo 500.

77.– Sea un triángulo de lado unidad (T_1). Si unimos entre sí los puntos medios de sus lados obtenemos cuatro triángulos. Tomamos el triángulo central (T_2) y repetimos con él la operación, obteniendo otros cuatro triángulos. Tomamos de nuevo el triángulo central (T_3) y repetimos la operación. Y así sucesivamente... Se pide:

a) La expresión de la suma S_n de las áreas A_i de n triángulos $T_{i,\ i=1,2,\ldots,n}$ consecutivos así obtenidos: $S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$.

b) El límite de S_n cuando $n \to \infty$.

c) Ahora consideramos en cada paso los perímetros de todos los triángulos producidos (no sólo del central). Es decir P_1 representa el perímetro del triángulo T_1, P_2 representa la suma de perímetros de los cuatro triángulos en que se divide T_1, P_3 representa la suma de perímetros de los dieciséis triángulos obtenidos tras una nueva división, etc.

Calcula el límite de la suma de $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$, cuando $n \to \infty$.

78.– Se considera la superficie S, de ecuación $z + 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Se pide:

a) Obtener la ecuación de la curva intersección de S con el plano XY e identificar dicha curva.

b) Calcular por integración el área encerrada por la curva.

c) Calcular por integración el volumen limitado por la superficie y el plano XY.

Curso 21/22. Examen de julio

79.– Se considera un depósito de agua con forma de cilindro recto de altura h y base circular de radio r. El depósito no tiene tapa superior y el espesor de las paredes es despreciable. Si su superficie exterior vale $S = 12\pi\ \mathrm{m}^2$, se pide calcular las dimensiones r y h que hacen máxima su capacidad, obteniendo ésta y justificando que se trata de un máximo.

80.– Sea la función $f(x,y) = e^{x\,\mathrm{sen}\,y}$. Sea el punto $P(1,0)$. Se pide obtener:

a) La dirección por la que debemos movernos en el plano XY, a partir del punto P, para que la variación de f sea máxima; y el valor de esa variación.

b) La diferencial segunda de la función f en P.

81.– Calcula la suma de la siguiente serie, con ayuda de la serie de potencias $\sum x^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

82.– Sea la función $f(x) = x\,e^{-x}$. Se pide:

a) Calcular el área limitada por la curva y el eje x entre $x = 0$ y $x = 1$.

b) Estudiar el comportamiento de la curva cuando $x \to \infty$ y obtener el área total limitada por la curva y la parte positiva del eje x.

Curso 22/23. Examen de junio

83.– Calcula la suma (si converge) de la serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n(n-2)}\right) - \frac{1}{n(n-2)}\right]$$

84.– Obtén las dimensiones de la caja paralelepipédica de volumen máximo y diagonal dada L.

85.– Sea la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Se pide:

a) Radio y campo de convergencia.

b) Función suma.

c) A partir del resultado anterior obtener el desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

86.– Se considera la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante, encerrada por las curvas siguientes:

$$l_1 : x^2 + y^2 = 4\,; \quad l_2 : x^2 + y = 2$$

Se pide:

a) Plantear el cálculo por integración del área de $\mathcal{R}$.

b) Calcular por integración el volumen generado por $\mathcal{R}$ al girar alrededor del eje OY.

c) Calcular por integración la longitud de l_1, razonando si era esperable el resultado.

d) Calcular por integración el área de la superficie generada por l_1 al girar alrededor del eje OX, razonando si era esperable el resultado.

Curso 22/23. Examen de julio

87.– Sea una ventana formada por un rectángulo de altura h con un semicírculo de radio r en la parte superior, de modo que el diámetro del semicírculo coincide exactamente con el lado superior del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es $4 + \pi$, se pide obtener las dimensiones que hacen máxima el área de la ventana, justificando que se trata de un máximo.

88.– Una mosca está posada en la cara superior de un cilindro recto de altura 4 m y base circular de radio unidad. En un momento dado el radio de la base del cilindro empieza a crecer a una velocidad de 20 cm/s, manteniéndose la forma cilíndrica y el volumen constante. Se pide:

a) Velocidad a la que desciende la mosca posada en el cilindro a los 5 segundos de iniciarse el movimiento.

b) Tasa de variación de la superficie lateral del cilindro en ese mismo instante, indicando las unidades de dicha tasa.

89.– Sea la serie de potencias: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n^2 - n}$. Se pide:

a) Calcular el radio y campo de convergencia.

b) Obtener la suma de la serie numérica para el caso particular $x = 0$.

90.– Calcula el volumen comprendido entre la superficie esférica de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen y la superficie de ecuación $z - x^2 - y^2 = 0$.

Curso 23/24. Examen de junio

91.– Sea una elipse de centro el origen y de semiejes horizontal $2a$ y vertical a. Se pide obtener el rectángulo inscrito de área máxima, justificando que se trata de un máximo y calculando dicha área. ¿Qué proporción guarda el área del rectángulo con la de la elipse?

92.– Se pide:

a) Obtener la función suma y el campo de convergencia de la serie de potencias:

$$x - 3x^3 + 5x^5 - 7x^7 + \dots$$

b) Estudiar la convergencia y obtener la suma, $\forall n \in \mathbb{N}$, de la serie numérica de término general:

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$$

93.– Los afijos de los complejos z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero, numerados en sentido antihorario. El primero de ellos tiene módulo nulo; el argumento de z_2 es $\pi/4$; la distancia entre z_3 y z_1 es igual a 2. Se pide obtener los tres complejos.

94.– Sea un paraboloide de revolución, de ecuación $z + \alpha(x^2 + y^2) = \beta$. Su vértice es el punto $V(0, 0, 4)$ y su intersección con el plano XY es una circunferencia de radio 2. Se considera la parte de paraboloide situada por encima del plano XY. Se pide:

a) Obtener los coeficientes α y β.

b) Calcular el volumen del cuerpo considerado.

c) Obtener el área de la superficie lateral de dicho cuerpo.

Curso 23/24. Examen de julio

95.– Se considera un paralelepípedo situado en el primer octante. Sus caras son paralelas a los planos coordenados y uno de sus vértices está en el origen de coordenadas, mientras el vértice opuesto está en el plano $x + y + 2z - 6 = 0$. Calcula las dimensiones que maximizan el volumen del paralelepípedo, justificando que se trata de un máximo.

96.– Calcula el campo de convergencia y obtén la función suma de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$.

97.– Halla el lugar geométrico de los afijos de los números complejos que equidistan de $z_1 = 1$ y $z_2 = -1 + 2i$.

98.– Calcula el volumen limitado por las superficies siguientes.

$$S_1 : x^2 + y^2 - 2z - 6 = 0\,; \quad S_2 : x^2 + y^2 + 3z - 6 = 0$$

Curso 24/25. Examen de junio

99.– Un fabricante de refrescos quiere diseñar una lata de aluminio con forma de cilindro circular recto, con un volumen de $128\pi\,\text{cm}^3$. Suponiendo que la cantidad de aluminio necesaria es proporcional a la superficie de la lata, ¿qué dimensiones (radio r, altura h) debe tener ésta para minimizar dicha cantidad?

100.– Halla la suma de: $1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{14} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{5} - \ldots$.

101.– Para cada una de las ecuaciones siguientes, halla el conjunto de números complejos que las satisfacen y represéntalo gráficamente en el plano complejo.

$$\mathbf{a})\, z^2 - \overline{z}^2 = i \quad \mathbf{b})\, \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = 1\,; \quad \mathbf{c})\, z^2 = \overline{z}$$

102.– Sea la región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $C_1 : x^2 - 2y = 0$ y $C_2 : y^2 - 2x = 0$, con $x, y \geq 0$.

1. Dibuja la región $\mathcal{R}$ y calcula su área.
2. Calcula el volumen de revolución que genera $\mathcal{R}$ al girar alrededor del eje $x = 2$.
3. Calcula la superficie que genera el contorno de $\mathcal{R}$ correspondiente a C_2, al girar en torno al eje x.

Curso 24/25. Examen de julio

103.– Se considera un prisma recto de altura $h = 8\,\text{m}$ y base cuadrada de lado $b = 4\,\text{m}$. En un instante dado, las dimensiones empiezan a variar a velocidad constante: los lados de la base se alargan a razón de $1\,\text{m/s}$, mientras la altura se reduce a razón de $2\,\text{m/s}$. Se pide calcular las velocidades a las que varían el volumen y la superficie del prisma al cabo de un segundo.

104.– Sabiendo que la serie de los inversos de los cuadrados de los naturales tiene como suma $S = \pi^2/6$, halla la suma de la serie siguiente:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots$$

105.– Calcula razonadamente el campo de convergencia de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}$$

106.– Dada la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, se pide:

1. Representarla gráficamente y calcular su área.
2. Calcular el volumen del elipsoide obtenido al hacer girar la elipse alrededor del eje X.
3. Plantear el cálculo del perímetro de la elipse y de la superficie del elipsoide.

7.4. Soluciones a los problemas

1.– **a)** Las derivadas parciales sólo existen (son nulas) si $\alpha = \beta$.

b) La función sólo es diferenciable en el caso $\alpha = \beta = 0$ (función nula).

2.– $\mathcal{C} = [-1, 1)$

3.– **a)** $A = \displaystyle\int_0^{\pi} (e^x - \operatorname{sen} x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (e^x + \operatorname{sen} x)dx$. **b)** $V = \frac{\pi}{2}\,(e^{4\pi} - 2\pi - 1)$.

4.– $E = 0$.

5.– **a)** $\mathcal{C} = (-a, a)$. **b)** $S(x) = \dfrac{x^4}{a^2 - x^2},\ \forall x \in \mathcal{C}$.

6.– **a)** $A = \dfrac{12\pi - 16}{3}$.

b) $V_{OX} = 2\pi\displaystyle\int_0^4 y\Big(\sqrt{16 - y^2} - \sqrt{4 - y}\Big)dy$. O bien $V_{OX} = \pi\displaystyle\int_0^2 (7x^2 - x^4)dx + \pi\int_2^4 (16 - x^2)dx$.

c) $V_{OY} = 2\pi\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{16 - x^2}\,dx - 2\pi\int_0^2 x(4 - x^2)\,dx$. O bien $V_{OY} = \pi\displaystyle\int_0^4 (12 - y^2 + y)\,dy$.

7.– La condición de diferenciabilidad se cumple si $\alpha + \beta - 1 > 0$.

8.– Se demuestra haciendo $3x + 2y = u,\ x - 2y = v$ y expresando (regla de la cadena) las derivadas de r respecto a x, y en función de las derivadas segundas de f y g respecto a u, v.

9.– $g^{(n}(x) = \dfrac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$. $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n + 1)\,x^n$.

10.– $V = \dfrac{8\pi}{3}$; $A = \dfrac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

11.– Viene dada por el módulo del vector gradiente en P: $\left|\overline{\nabla z}\right| = 4\sqrt{5}$.

12.– **a)** $a < 1$. **b)** $a < 0$. **c)** Converge condicionalmente (teorema de Leibnitz).

13.– El lugar geométrico pedido es la recta de ecuación: $x = \dfrac{a + b}{2}$.

14.– $V = \dfrac{100\pi}{3}$.

15.– **a)** $E = 3\,w$.

b) Llamando $u = z/x$ y $v = y/x$ obtenemos: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 2x\dfrac{\partial f}{\partial v} - z\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

Suponiendo que se cumplen los requisitos del teorema de Schwarz, puede también calcularse más brevemente como $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$, obteniendo el mismo resultado.

16.– $\lambda < -1$, converge; $-1 \le \lambda < 0$, no converge; $0 < \lambda \le 1$, diverge; $\lambda > 1$, converge.

17.– **a)** $V = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{2}$. **b)** Ecuación de la curva: $z = 1 - \dfrac{y^2}{2}$; $A = \dfrac{2\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)$.

18.– **a)** F y G se anulan en P. Las 8 derivadas parciales de F y G respecto a x, y, z, t son continuas en todo $\mathbb{R}^4$. El determinante del jacobiano de $\vec{g} = (F, G)$ respecto a (z, t) en $(1, -2)$ vale $1 \neq 0$.

b) $\vec{\nabla} z\Big|_{(1,2)} = (-3, 4)$. **c)** $D_{\vec{u}}\, t|_{(1,2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

19.– **a)** $\mathcal{C} = \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. **b)** $S(x) = -\dfrac{1}{3}\ln(1 - 3x)$.

20.– **a)** $A = 1$. **b)** $V_{OX} = \dfrac{16}{15}\pi$. **c)** $V_{OY} = 3\pi$.

21.– **a)** $g(0) = 0$; g' debe existir y ser continua en un entorno del origen; $g'(0) \neq 0$.

b) El vector unitario en $(0, 3)$ es $\vec{\omega} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. La derivada direccional es $D_{\vec{\omega}}\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

22.– **a)** La serie converge absolutamente para $|k| < 4$. **b)** La serie diverge.

23.– **a)** $V_y = \frac{4\pi}{15}$. **b)** $A = 2\displaystyle\int_0^1 2\pi(1 - y^2)\sqrt{1 + 4y^2}\, dy$. O bien, $A = 2\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{\frac{5 - 4x}{4 - 4x}}\, dx$.

24.– **a)** $f(0, b) = b\,|b|\,,\ \forall b \in \mathbb{R}$. **b)** $z = -\pi\sqrt{1 + \pi^2}\, x - \sqrt{1 + \pi^2}\, y + 2\pi\sqrt{1 + \pi^2}$.

25.– $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n\, x^{n-2} = S''(x) = 2\cos 2x,\ \forall x \in (-r, r)$.

26.– **a)** $A = \dfrac{19}{3}$. **b)** $V_{OX} = \pi\displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 5)^2 dx - 2\pi\int_0^1 (1 - x)^2 dx$.

27.– No hay puntos críticos en el interior del dominio. Los extremos absolutos (en la frontera) son: mínimo absoluto en $(-\sqrt{2}, 0)$ y máximos absolutos en $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

28.– En $x = -1$ la función no existe, por lo que no tiene sentido estudiar su desarrollo. En $x = 1$, la validez del desarrollo puede justificarse de dos modos:

1) El más sencillo es calcular la suma de la serie en $x = 1$ (resulta la armónica alternada, de suma $\ln 2$), comprobando que coincide con $f(1)$, por lo que el desarrollo es válido.

2) En $x = 1$ la función f existe. Y sabemos (teorema de Leibnitz) que en ese punto la serie converge. Entonces (2º teorema de Abel) la función suma es continua en $x = 1$, por lo que podemos obtener su valor como límite del valor de f cuando $x \to 1$, es decir $f(1) = \ln 2$.

29.– **a)** Longitud recorrida: $S = \dfrac{145^{1.5} - 1000}{135}$ kilómetros. Tiempo empleado: $t = \dfrac{S}{12}$ horas.

b) Longitud de la circunferencia: $l = 2\pi R = \pi$ metros. Número de vueltas: $N = \dfrac{S}{l} = \dfrac{S}{\pi}$.

30.– El valor pedido es $\left.\dfrac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 1$.

31.– $\mathcal{C} = (-1, 1]$. $S(x) = \ln|1 + x^3|$.

32.– Distancia $D = N \cdot S$, (N = número de vueltas, S = longitud del arco de cicloide). $N = \dfrac{l}{2\pi R} = \dfrac{v \cdot t}{2\pi R} = 3000$ vueltas. $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\, d\theta = \frac{8}{\pi} \Longrightarrow D = \frac{24000}{\pi}$.

33.– $E = yx^y\,(1 - \ln x \ln y)$.

34.– Sus derivadas parciales en el origen son nulas. La función cumple la condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad.

35.– Radio $r = 3$. Campo $\mathcal{C} = [2, 8]$.

36.– **a)** $A = \dfrac{74}{15}$.

b) $V_{OX} = \displaystyle\int_2^3 \pi\left(y_2^2 - y_1^2\right) dx = \int_2^3 \pi\left[\left(3x^3 + x^2\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x^4 + 3x^3 - 2x^2\right)^2\right] dx.$

c) $S_{OY} = \displaystyle\int_2^5 2\pi x\, dS = \int_2^5 2\pi x\sqrt{1 + \left(y_1'\right)^2}\, dx = \int_2^5 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}x^3 + 9x^2 - 4x\right)^2}\, dx.$

37.– El valor máximo vendrá dado por el módulo del vector gradiente de la función "nivel de contaminación": $\|\vec{\nabla} z\| = \sqrt{68}$.

38.– Su término general a_n es equivalente a $e^{a-b}\,\dfrac{1}{n}$. La serie diverge $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ya que $\sum \dfrac{1}{n}$ es la serie armónica, divergente.

39.– $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H,\ S_L = \pi\, R\sqrt{R^2 + H^2} = \pi RD$ (D es la longitud de la generatriz del cono).

40.– **a)** $k \geq 3$. **b)** $k \geq 4$. **c)** $k \geq 4$.

41.– La serie converge en $\mathcal{C} = (-2, 2)$. La función suma es $S = \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$.

42.– **a)** $A = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} y\, dy + 2\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - y^2}\, dy.$

b) $V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\left(\sqrt{4 - x^2} - x\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \pi y^2\, dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \pi(4 - y^2)\, dy.$

c) $S = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi\sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^2} dx + 2\int_0^{\sqrt{2}} 2\pi x\sqrt{1 + 1^2}\, dx =$

$2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 4\pi\, dx + 4\sqrt{2}\pi\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{2}} = 8\pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2} = 12\pi\sqrt{2}.$

43.– **a)** Según el vector $\vec{v} = (0, 1)$. **b)** Según $\vec{v}_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ o bien $\vec{v}_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

c) La función $(T \circ \vec{\varphi})(t) = T\big(\vec{\varphi}(t)\big)$ evalúa la temperatura en los puntos de la curva dada en paramétricas. El valor $(T \circ \vec{\varphi})'(0)$ mide la variación de la temperatura respecto al parámetro t en el punto de la curva $\vec{\varphi}(0) = (\cos 0,\ 1{+}\operatorname{sen} 0) = (1, 1)$. Resulta $(T \circ \vec{\varphi})'(0) = -1/2$.

44.– **a)** Divergente (usando el criterio de condensación). **b)** Convergente a $S = \pi^2/6$.

45.– **a)** $P = 4\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - 4x^2}}\, dx.$

b) $A = 4\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\pi.$

c) $V = 2\displaystyle\int_0^2 \pi\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{8\pi}{3}.$

46.– La función tiene un máximo en $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo en $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

47.– **a)** La serie converge (por el criterio logarítmico o por comparación de series).

b) La serie converge si y sólo si $a \in (\infty, -e] \cup (e, \infty)$.

48.– Radio de convergencia $r = 2$. Campo $\mathcal{C} = (-2, 2)$. Función suma $S(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$.

49.– $V = 2\displaystyle\int_0^3 \pi(r_e^2 - r_c^2)\,dz = 2\int_0^3 \pi(9-z^2)\,dz = 36\pi.$

50.– La dirección de máximo crecimiento viene dada por el unitario $\vec{\omega} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

51.– Convergente. $S = 0$.

52.– Fijado $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, luego converge puntualmente a $f(x) = 0$.

Para hallar el supremo de $f_n(x)$ en $[0,1]$, hacemos $f_n'(x) = 0$, obteniendo $\sup f_n(x) = \dfrac{1}{en}$, que tiende a 0 si $n \to \infty$, luego la convergencia es uniforme.

53.– Las secciones $y =$ cte. son circunferencias. $V = 2\displaystyle\int_0^2 \pi\left(1 - y^2/4\right)dy = \frac{8\pi}{3}$.
Otra solución es rotar en torno a OY la elipse sección del elipsoide con el plano $z = 0$.

54.– Existe un máximo relativo en $P_1(0,0)$ y un mínimo relativo en $P_2\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

55.– **a)** Convergente. La suma vale $S = 1$ (serie telescópica).

b) Aplicando dos veces el criterio de condensación, resulta divergente.

56.– Se puede resolver cortando por planos $z =$ cte. o bien calculando la diferencia de las expresiones correspondientes a cada uno de los volúmenes.

a) $V = \dfrac{49}{6}\pi\,\mathrm{m}^3$.

b1) $C = \pi\displaystyle\int_0^2 (z^2 - 3z + 5)f(z)dz + \pi\int_2^3 (9-3z)f(z)dz.$

b2) $C = \pi\displaystyle\int_0^3 (9-3z)f(z)dz - \pi\int_0^2 (4-z^2)f(z)dz.$

57.– La función derivada direccional tiene un mínimo relativo en $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$, donde vale $-\dfrac{\sqrt{5}}{9}$.

58.– La serie es absolutamente convergente para $a \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. Fuera de esos intervalos no converge. Es decir, no es condicionalmente convergente para ningún valor de a.

59.– Radio $r = \dfrac{1}{2}$. Campo $C = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Suma $S(x) = -\ln(1-2x)$.

60.– **a)** Generamos la superficie esférica girando en torno al eje OX la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Resulta $S = 4\pi R^2$.

b) Podemos obtener el volumen cortando la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ por planos $z = \text{cte}$. O bien, girando en torno a OX el área plana limitada por $x^2 + y^2 = R^2$. Resulta $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

61.– **a)** La ecuación, en la forma $F(t, x) = 0$, cumple las condiciones del teorema de la función implícita.

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{(0,1)} = 1$. **c)** $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0} = \dfrac{\cos 1}{6}$.

62.– La serie cumple las condiciones del teorema de Leibnitz, por lo que converge a $S = 1 - \dfrac{3}{2}\ln 2$. Al ser divergentes las subseries positiva y negativa, la convergencia es condicional (teorema de Riemann).

63.– **a)** $A = \dfrac{3\pi + 2}{6}$; **b)** $V = \dfrac{\pi}{6}(8\sqrt{2} - 7)$; **c)** $S = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$; **d)** $A_{ox} = 4\pi\sqrt{2}$.

64.– **a)** $L = xy^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$; **b)** Dimensiones: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

65.– Se puede ver que diverge de varias maneras: a) por el criterio del cociente; b) por el criterio de la raíz, aplicando la fórmula de Stirling; c) al ser de términos positivos, con $a_n \to \infty$.

66.– **a)** $A = \dfrac{17 - 6\ln 2}{12}$; **b)** $L = \dfrac{6 + \ln 2}{4}$; **c)** $S = \dfrac{31}{6}\pi$.

67.– **a)** Divergente, por el criterio de condensación.

b) Convergente, por el criterio logarítmico.

c) Convergente, por el criterio de la raíz.

d) Divergente, por el criterio de Raabe.

68.– Existe un máximo en $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y un mínimo en $Q\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

69.– $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$.

70.– **a)** $V = 27\pi\ \text{m}^3$.

b) $C = \pi \displaystyle\int_{-3}^{0} (15 + 2z - z^2) f(z) dz$.

71.– **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, convergente; $S_p = \dfrac{\pi^2}{24}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, convergente; $S_i = \dfrac{\pi^2}{8}$.

72.– Derivando, sumando la serie geométrica obtenida e integrando, resulta: $S = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, cuyo campo de convergencia es $\mathcal{C} = (-1, 1)$.

73.– Aplicando la condición necesaria de extremos se obtienen tres puntos críticos: $P(0,0)$, $Q(0,1)$ y $R(0,-1)$. Estudiando los hessianos, resulta que d^2f es definida positiva en P e indefinida en los otros dos puntos, luego existe mínimo en P y punto de silla en Q y R.

74.– **a)** $A = 2$. **b)** $A_n = n\displaystyle\int_0^{\pi/n} \operatorname{sen} nx dx = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. **c)** $V_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^2 nx dx = \frac{\pi^2}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

75.– **a)** $P_2(x,y) = x + xy + T_2(x,y)$.

b) $P_2(0.2, 0.1) = 0.22$. Error relativo $E_r = \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{0.0012}{0.2188} \approx 0.6\,\%$.

76.– Usando como Lagrangiana $L = x^3+y^3+z^3+t^3+\lambda(x+y+z+t-20)$ se obtiene $P(5,5,5,5)$. La matriz hessiana resulta definida positiva.

77.– **a)** $S_n = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}\left[1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i = \infty$.

78.– **a)** $x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$, elipse de semiejes 1 y 2; **b)** $S = 2\pi$; **c)** $V = 4\pi$.

79.– $r = h = 2\,\mathrm{m}$; $C = 8\pi\,\mathrm{m}^3$; $d^2L|_{dg=0} < 0 \Longrightarrow$ máximo.

80.– Dirección dada por $\vec{u} = (0,1)$; $D_{\vec{u}}f(P) = 1$; $d^2f(P) = 2dxdy + dy^2$.

81.– $S = 6$ (se deriva y multiplica por x dos veces la serie $\sum x^n$. Luego se hace $x = 1/2$).

82.– $A = \dfrac{e-2}{e}$; $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x e^{-x} dx = 1$.

83.– El primer sumando del término general corresponde a una serie telescópica. El segundo se descompone en fracciones simples. La suma resulta $S = \ln 2 - 3/4$.

84.– Volumen $V = xyz$. Diagonal $L^2 = x^2+y^2+z^2$. Lagrangiana $\mathcal{L} = xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-L^2)$. Resulta el cubo de lado $l = L/\sqrt{3}$.

85.– Radio $r = 1$; campo $C = [-1,1]$; suma $S(x) = \arctan x$; $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

86.– **a)** $A_{\mathcal{R}} = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2} + x^2 - 2\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4-x^2} dx$.

b) $V_{OY} = 10\pi/3$.

c) $S_{l_1} = \pi$. Corresponde a 1/4 de la longitud de la circunferencia de radio 2, $(2\pi r/4)$.

d) $A_{OX} = 8\pi$. Corresponde a 1/2 de la superficie de una esfera de radio 2 $(4\pi r^2/2)$.

87.– Área $A = 2rh + \pi r^2/2$. Perímetro $P = 2r + 2h + \pi r = 4 + \pi$. Lagrangiana $\mathcal{L} = 2rh + \pi r^2/2 + \lambda(2r + 2h + \pi r - 4 - \pi)$. Resulta $r = h = 1$.

88.– **a)** $V = -0.2\,\mathrm{m/s}$ (véase cuestión nº 46). **b)** $\dfrac{dS}{dt} = -0.4\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

89.– Radio $r = 1$. Campo $C = [0,2]$. Suma $S = 2\ln 2$.

90.– $V = \dfrac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$.

91.– Tomando el punto (x, y) de la elipse en el primer cuadrante como vértice superior derecho del rectángulo, el área de éste vale $A = 4xy$. La ecuación de la elipse y la función lagrangiana son, respectivamente:

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,; \qquad L = 4xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4a^2)$$

Resulta: $x_M = \sqrt{2}a$, $y_M = a/\sqrt{2}$. Proporción: $A_r/A_e = 4a^2/2\pi a^2 = 2/\pi$.

92.– Los pasos para calcular la función suma son: 1) sacar factor común x; 2) reconocer la derivada de una serie geométrica $G(x)$, que sumamos y derivamos, obteniendo $g(x)$; 3) multiplicar $g(x)$ por x. Estudiando los extremos del campo de convergencia, resulta:

$$S(x) = \frac{x - x^3}{(1 + x^2)^2}\,; \qquad \mathcal{C} = (-1, 1)$$

Aplicando el criterio de la raíz n-ésima a $|a_n|$, vemos que la serie numérica es incondicionalmente convergente. Su suma se obtiene particularizando: $S(1/2) = 6/25$.

93.– Los tres complejos pedidos son: $z_1 = 0\,;\ z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}\,;\ z_3 = 2e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

94.– **a)** $\alpha = 1\,;\ \beta = 4$. **b)** $V = \displaystyle\int_0^4 \pi(4 - z)\,dz = 8\pi$.

c) Cortamos el paraboloide por el plano XZ $(y = 0)$ y giramos en torno al eje OZ la curva obtenida. Resulta:

$$A = \int_0^2 2\pi x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$$

95.– $V = xyz$; $g = x + y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow L = xyz + \lambda(x + y + 2z - 6)$. Solución $x = y = 2$, $z = 1$.

96.– Es una serie geométrica de razón $\lambda = \dfrac{x+1}{2}$. Campo $\mathcal{C} = (-3, 1)$. Suma $S(x) = \dfrac{2}{1-x}$.

97.– Si $z = x + yi$, a partir de la condición $|z - z_1| = |z - z_2|$, se llega a la ecuación $y = x + 1$.

98.– $V = \displaystyle\int_{-3}^0 \pi(6 - 3z)\,dz + \int_0^2 \pi(6 + 2z)\,dz = 15\pi$.

99.– Hemos de minimizar la superficie cilíndrica de la lata. Igualando el volumen al valor constante dado, obtenemos la condición $g = 0$. La función lagrangiana es:

$$L = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 128\pi)$$

Resultado: $r = 4$, $h = 8$, $\lambda = -1/2$.

100.– La ley que siguen los términos es: un inverso de impar, positivo, cuatro inversos de pares, negativos. Así pues, tomamos una suma parcial de $5n$ términos, obteniendo $S_{5n} = I_n - P_{4n}$. Calculando el límite, resulta $S = 0$.

101.– **a)** $\mathcal{C}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = a + \dfrac{i}{4a};\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$. Los afijos forman una hipérbola equilátera.

b) $\mathcal{C}_2 = \left\{ 0, 1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \right\}$.

c) $\mathcal{C}_3 = \left\{ a + b\,i \in \mathbb{C} \,/\, (a-1)^2 + b^2 = 1,\ a \neq 0 \right\}$. Los afijos forman la circunferencia de centro $C(1, 0)$ y radio $R = 1$, excepto el punto $(0, 0)$.

102.– $A = \dfrac{4}{3}\,;\ V = \dfrac{44\pi}{15}\,;\ S = \dfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

103.– $V = b^2h\,;\ S = 4bh + 2b^2\,;\ \dfrac{db}{dt} = 1\,\mathrm{m/s}\,;\ \dfrac{dh}{dt} = -2\,\mathrm{m/s}$.

Derivamos V y S, usando la regla de la cadena. Obtenemos $\dfrac{dV}{dt} = 10\ \mathrm{m^3/s}\,;\ \dfrac{dS}{dt} = 4\ \mathrm{m^2/s}$.

104.– Es la serie de término general $1/n^2$, sin los cuadrados de los múltiplos de 4. Al ser absolutamente convergente ($\Longrightarrow$ incondicionalmente convergente) se puede sumar como diferencia de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ y $\sum \dfrac{1}{(4n)^2}$. Resulta $S = \dfrac{5}{32}\pi^2$.

105.– Estudiando la convergencia absoluta por el criterio de la raíz o el del cociente, resulta $r = 1 \Longrightarrow 0 < x < 2$. Las series numéricas que se obtienen en los extremos son la armónica (en $x = 0$) y la armónica alternada (en $x = 2$). El campo de convergencia es $\mathcal{C} = (0, 2]$.

106.– $A = 2\pi a^2\,;\ V = \dfrac{8}{3}\pi a^3$. El perímetro de la elipse y la superficie del elipsoide se pueden obtener integrando en x o en y.

$$P = 4\int_0^{2a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16a^2 - 4x^2}}\,dx = 4\int_0^{a} \sqrt{1 + \frac{4y^2}{a^2 - y^2}}\,dy.$$

$$S = 2\int_0^{2a} 2\pi a \sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}}\sqrt{1 + \frac{x^2}{16a^2 - 4x^2}}\,dx = 2\int_0^{a} 2\pi y \sqrt{1 + \frac{4y^2}{a^2 - y^2}}\,dy.$$

7.5. Cuestiones tipo test (V-F)

1.– Sea la función $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

__• Si f es continua, tiene primitiva.

__• Si f es continua a trozos, es integrable.

__• Si f es integrable, $\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f.

__• Si f es discontinua, puede tener primitiva.

2.– Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$.

__• $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x) = \int f(x)\ dx \cdot \int g(x)\ dx.$

__• Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx > 0$, entonces existe $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\ dx.$

__• $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx,\ \forall c \in \mathbb{R}.$

__• $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$

3.– Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$.

__• Si en $\vec{a}$ existe límite funcional, existen los direccionales y viceversa.

__• Si en $\vec{a}$ los límites direccionales existen y coinciden, existe límite funcional.

__• Si f es continua existen y coinciden los límites según cualquier trayectoria.

__• Si los límites direccionales en $\vec{a}$ dependen de la dirección, f no es continua en $\vec{a}$.

4.– Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$.

__• f es diferenciable.

__• Se cumple el teorema de Schwarz, de las derivadas cruzadas.

__• No podemos asegurar que la matriz hessiana sea simétrica.

__• La derivadas parciales de f son continuas.

5.– Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea el punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

__• Para que f sea diferenciable en $\vec{a}$, las derivadas parciales han de ser continuas en $\vec{a}$.

__• Si la derivada direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, f no es diferenciable en $\vec{a}$.

__• Si la derivada direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, las derivadas parciales en $\vec{a}$ son distintas siempre.

__• Si f es diferenciable en $\vec{a}$, se cumplirá: $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g}$ en $\vec{a}$.

6.– Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{a}$ interior a su dominio $D \subset \mathbb{R}^n$.

__• Si se cumple $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$ en $\vec{a}$, la función es diferenciable en $\vec{a}$.

__• Si $f \in C^2$, entonces tiene límite funcional en $\vec{a}$.

__• Si $D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = 0 \ \forall \vec{\omega}$, la función es continua en $\vec{a}$.

__• Si $f(\vec{x})$ tiene un extremo relativo en $\vec{a}$ y es diferenciable en $\vec{a}$, entonces $\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}$.

7.– Para el cálculo de extremos relativos, hemos de determinar qué tipo de forma cuadrática es la diferencial segunda de la función. Entonces

__• Si todos los menores de la matriz hessiana son negativos, la f. c. es definida negativa.

__• Si diagonalizamos la matriz hessiana obtenemos el tipo de forma cuadrática.

__• Si el determinante hessiano es nulo, la forma cuadrática es semidefinida.

__• Si la forma cuadrática es semidefinida, no existen máximos ni mínimos relativos.

8.– Indíquese cuáles de las siguientes expresiones son ciertas.

__• Sean $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$; $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y}) = \vec{\Phi}(\vec{x})$; $\vec{f}, \vec{g}$ diferenciables. Entonces, $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} = \sum \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

__• Sea $z = f(\vec{x})$. Si f es suficientemente regular, $d^p z = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right)^{(p}$.

__• Si $u = f(\vec{x})$, entonces $du^2 = d(u^2)$.

__• Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciable. Entonces, $\dfrac{d\vec{f}^{-1}(\vec{x})}{d\vec{x}} = \left[\dfrac{d\vec{f}(\vec{y})}{d\vec{y}} \right]^{-1}_{\vec{y} = \vec{f}^{-1}(\vec{x})}$.

9.– Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie en $\mathbb{R}^3$.

__• Si existe $\vec{\nabla} f$ en un punto, es perpendicular a la superficie en dicho punto.

__• Si existe $\vec{\nabla} f$ en un punto, nos indica la dirección del plano XY en que f crece más rápido, a partir de dicho punto.

__• Si f es diferenciable, las componentes de $\vec{\nabla} f$ son las derivadas parciales de f.

__• $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$ es condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad.

10.– Sea la función $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$. En el $(0, 0)$, la función

__• Tiene un máximo.

__• Tiene un mínimo.

__• No tiene ni máximo ni mínimo.

__• No cumple la condición necesaria de extremo.

11.– Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que $F(x,y)=0$ define a y como función implícita de x en X si y sólo si $\forall x \in X\ \exists \psi(x)/\ F(x,\psi(x))=0$. Entonces

__• Es condición necesaria para que exista función implícita que $\partial F/\partial x$ sea continua.

__• Para que exista función implícita en un entorno de (a,b), es condición suficiente que F, $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ sean continuas y $F(a,b)=0$.

__• Si $F(x,y)=x^2+y^2+1$, no existe función implícita.

__• Si existe función implícita, se cumple: $\dfrac{d\psi}{dx}=-\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$

12.– Sean la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ f\in C^2$ y el punto $P\,(a,b,f(a,b))\in\mathbb{R}^3$. Entonces

__• $z=f(a,b)$ es la ecuación de un plano horizontal.

__• La ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto P es $z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)$.

__• La matriz hessiana de f es simétrica.

__• No podemos asegurar que f sea dos veces diferenciable.

13.– Sea f una función de varias variables y g una condición de ligadura.

__• Si f tiene un extremo relativo en $\vec{a}$, el extremo se mantiene cuando imponemos g.

__• Si f tiene un extremo relativo condicionado en $\vec{a}$, entonces f (sin ligadura) tiene también un extremo relativo en ese punto.

__• Cuando la forma cuadrática d^2L es definida, no es preciso utilizar la restricción $dg=0$.

__• Si la f. c. d^2L es indefinida, puede convertirse en definida con la restricción $dg=0$.

14.– Sean $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x});\ \vec{z}=\vec{g}(\vec{y})=\vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right)=(\vec{g}\circ\vec{f})(x)$.

__• Es condición necesaria y suficiente que $\vec{f}$ y $\vec{g}$ sean diferenciables para que $\vec{g}\circ\vec{f}$ lo sea.

__• Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ tienen derivadas parciales, se cumple la regla de la cadena.

__• Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ tienen derivadas parciales, $\vec{g}\circ\vec{f}$ es diferenciable.

__• Si $\vec{g}\circ\vec{f}$ no es diferenciable, al menos una de las dos funciones no lo es.

15.– Si la serie de términos positivos $\sum a_n$ es divergente, la serie $\sum (a_n)^\alpha,\ \alpha>1$

__• Es divergente.

__• Es convergente.

__• Puede ser convergente o divergente.

__• Puede ser oscilante.

16.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión oscilante. Se cumplirá que

__• Su término general no tiende a 0.

__• Es de términos positivos y negativos.

__• La serie $\sum a_n$ es absolutamente divergente.

__• Podemos calcular el carácter de $\sum a_n$ mediante el teorema de Leibnitz.

17.– Una serie tiene como término general el infinitésimo a_n, cuyo signo es alternativamente positivo y negativo. Entonces

__• La serie es absolutamente convergente.

__• Si $\forall n\, |a_n| < |a_{n-1}|$, la serie es convergente.

__• Si $\exists n / |a_m| < |a_{m+1}|\ \forall m \geq n$, la serie es convergente.

__• La serie es convergente pero no absolutamente convergente.

18.– La convergencia de una serie de término general $\dfrac{P_k(n)}{r^n},\ r \in \mathbb{R}$

__• No depende de los coeficientes del polinomio $P_k(n)$.

__• No depende de r.

__• Depende del grado del polinomio $P_k(n)$.

__• Este tipo de series converge siempre.

19.– Si al aplicar el criterio de D'Alembert a $\sum a_n$, se obtiene un valor de $l = -1$,

__• La serie es convergente.

__• La serie es divergente.

__• La serie es absolutamente divergente.

__• El criterio ha sido incorrectamente aplicado.

20.– Si la serie de término general a_n es absolutamente convergente, la de término general $\dfrac{1}{a_n}$

__• Puede converger o diverger.

__• Es convergente.

__• Es absolutamente convergente.

__• No es convergente.

21.– Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos, tales que $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, verificándose que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces la serie $\sum a_n$

__• Es divergente.

__• Converge sólo si es geométrica de razon menor que uno.

__• Es convergente.

__• Puede converger o diverger.

22.– Sea $\{f_n\}$ una sucesión funcional definida en todo $\mathbb{R}$.

__• Dado $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión numérica.

__• Si $\forall x \in \mathbb{R}$ podemos obtener $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \phi(x)$, $\{f_n\}$ converge uniformemente a ϕ.

__• Si las funciones f_n son continuas y convergen a una función no continua, la convergencia no es uniforme.

__• Si la sucesión $\{f_n\}$ es convergente $\forall x \in \mathbb{R}$, la serie de término general f_n también lo es.

23.– Sea la sucesión funcional $\{f_n\}$, definida en $I \subset \mathbb{R}$. Sea $F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$. La serie $\sum f_n$

__• Es la sucesión de sumas parciales $\{F_n\}$.

__• Converge en I si, $\forall x \in I$, se cumple: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} / \ |F_p(x) - F_q(x)| < \varepsilon\ \forall p, q \geq n$.

__• Converge uniformemente en $I \subset \mathbb{R}$ si $\sum f_n$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos, convergente.

__• Converge siempre que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in I$.

24.– Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$ y sea r su radio de convergencia, calculado por el teorema de Cauchy-Hadamard, utilizando el criterio de la raiz n-ésima. Podemos afirmar que

__• Utilizando el criterio del cociente se obtiene el mismo radio de convergencia.

__• El campo de convergencia será de la forma $(-r, r)$ o, si no, de la forma $[-r, r]$.

__• r puede valer 0 ó ∞.

__• La expresión $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe siempre.

25.– Sea A el conjunto de números complejos cuyo argumento cumple $\theta^2 = a \in \mathbb{R}$. Entonces el lugar geométrico de los afijos de los elementos de A será

__• Una recta de pendiente $\tan a$.

__• Dos rectas simétricas respecto al eje X, de inclinación $\pm\frac{a}{2}$ radianes.

__• Dos rectas verticales de ecuación $x = \pm\sqrt{a}$.

__• Una hipérbola equilátera.

26.– Sea el complejo $z = a + bi$. Se verifica

__• $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

__• $\dfrac{z \cdot \overline{z}}{|z|} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

__• La parte imaginaria de z^2 vale $2ab$.

__• La parte real de e^z vale $e^b \cos a$.

27.– Sea z un número complejo no nulo.

__• Su inverso tiene el mismo argumento que su conjugado.

__• El conjugado de su cuadrado es igual al cuadrado de su conjugado.

__• Su potencia n-sima cumple: $z^n = \rho^n(\cos^n \theta + i \operatorname{sen}^n \theta)$.

__• La expresión $\sqrt[n]{z}$ representa un conjunto de n complejos, de afijos equiespaciados en una circunferencia de radio $|z|$.

7.6. Soluciones a las cuestiones tipo test

Ejercicio	Respuestas válidas
1	a, b, d
2	d
3	c, d
4	a, b, d
5	Ninguna
6	b, d
7	b
8	a, b, d
9	b, c
10	c
11	c
12	a, b, c
13	c, d
14	d
15	c
16	a, c
17	b
18	a
19	d
20	d
21	d
22	a, c
23	a, b
24	c
25	Ninguna
26	a, b, c
27	a, b

UNIVERSIDADE DA CORUÑA