CÁLCULO INFINITESIMAL 2

APUNTES DE LA ASIGNATURA

(con ejercicios de autoevaluación)

Jaime Fe Marqués
ETSI Caminos - A Coruña

Objetivo de estos apuntes

El presente texto se propone ser una ayuda para los estudiantes de la asignatura Cálculo Infinitesimal 2.

Contiene las ideas fundamentales que se exponen en las clases de teoría, acompañadas de ejemplos resueltos y ejercicios propuestos. Al recoger una parte importante del contenido de dichas sesiones, permite dedicar mayor atención a la explicación, facilitando así la comprensión de la materia. Los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos facilitan asimismo el estudio personal posterior.

Estos apuntes pretenden ser un apoyo a las clases, pero no sustituirlas. En el aula se desarrollan y comentan las ideas aquí contenidas, se relacionan conceptos, se resuelven ejercicios y se dibujan algunos gráficos que complementan los apuntes. Por ello se recomienda vivamente la asistencia a clase para facilitar el dominio de la materia. En la medida de lo posible, es deseable una lectura de los apuntes previa a las clases, que ayude a conocer con antelación los principales aspectos del tema que se va a tratar.

Índice

TEMA I. INTEGRACIÓN 9

1. Primitiva de una función 9
   1.1. Definición . . . 9
   1.2. Funciones discontinuas con primitiva . . . 9
   1.3. Condición necesaria para la existencia de primitiva . . . 10

2. La integral de Riemann 11
   2.1. Partición de un intervalo . . . 11
   2.2. Sumas de Darboux . . . 11
   2.3. Función integrable según Riemann . . . 12
   2.4. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad . . . 13
   2.5. Condiciones suficientes de integrabilidad . . . 13
   2.6. Propiedades de la integral de Riemann . . . 14

3. Teorema de la media 14

4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo. 15
   4.1. Función integral . . . 15
   4.2. Teorema . . . 16
   4.3. Corolario. Regla de Barrow . . . 16

5. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo 17

6. Integrales impropias 17

7. Ejercicios de autoevaluación 18
   7.1. Test verdadero/falso . . . 18
   7.2. Cuestión . . . 18
   7.3. Solución del test verdadero/falso . . . 18
   7.4. Solución de la cuestión . . . 18

TEMA II. FUNCIONES VECTORIALES 19

1. Introducción. Tipos de funciones 19

2. Espacio euclídeo 19
   2.1. Producto escalar ordinario . . . 19
   2.2. Norma euclídea . . . 20
   2.3. Distancia euclídea . . . 20

3. Funciones vectoriales de variable real 20
   3.1. Límite . . . 21
   3.2. Continuidad . . . 21
   3.3. Diferenciabilidad . . . 21

4. Funciones reales de variable vectorial **22**
4.1. Límite. 22
4.2. Continuidad 24
4.3. Derivada direccional y derivada parcial 24
4.4. Diferencial 26
4.5. Gradiente y curvas de nivel. Interpretación geométrica 27
4.6. Teoremas de diferenciabilidad 28

5. Funciones vectoriales de variable vectorial **31**
5.1. Límite 31
5.2. Continuidad 31
5.3. Diferenciabilidad 31

6. Composición de funciones **32**
6.1. Función compuesta. Continuidad y diferenciabilidad 32
6.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena 33

7. Derivadas de orden superior **35**
7.1. Definición 35
7.2. Derivadas cruzadas 36
7.3. Diferenciales sucesivas 37

8. Desarrollo de Taylor **38**
8.1. Expresión general 38
8.2. Expresión matricial. 40

9. Extremos relativos **41**
9.1. Condición necesaria de extremo 41
9.2. Condición suficiente de extremo 42
9.3. Determinación del tipo de forma cuadrática 43
9.4. Cálculo de extremos. Resumen y ejemplos 43

10. Función implícita **45**
10.1. Definición 45
10.2. Teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables 46
10.3. Generalización del teorema a funciones vectoriales 47

11. Extremos condicionados **49**
11.1. Condiciones en forma explícita 49
11.2. Condiciones en forma implícita 49

12. Ejercicios de autoevaluación **52**
12.1. Test verdadero/falso 52
12.2. Cuestiones 53
12.3. Solución de los test verdadero/falso 54
12.4. Solución de las cuestiones 56

TEMA III. SERIES NUMÉRICAS **59**

1. Definición **59**

2. Serie geométrica **60**

3. Condición necesaria de convergencia **60**

4. Propiedades de las series numéricas **61**

5. Criterio de convergencia de Cauchy **63**

6. Series de términos positivos. Criterios de convergencia **63**
6.1. Mayorante y minorante 64
6.2. Serie de Riemann 64
6.3. Comparación de series 66
6.4. Criterio de la raíz (Cauchy-Hadamard) 67
6.5. Criterio del cociente (D'Alembert) 68
6.6. Criterio de Raabe 69
6.7. Criterio logarítmico 70
6.8. Criterio de condensación (comparación con $\sum 2^n a_{2^n}$) 71

7. Series de términos positivos y negativos **72**
7.1. Convergencia y divergencia absoluta e incondicional 72
7.2. Teorema de Riemann 74
7.3. Teorema de Dirichlet 75
7.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz 76

8. Métodos de suma de series **78**
8.1. Por descomposición 78
8.2. A partir de la armónica 80
8.3. A partir del desarrollo en serie de e^x 81
8.4. Series hipergeométricas 82
8.5. Carácter y suma de series. Resumen 84

9. Ejercicios de autoevaluación **85**
9.1. Test verdadero/falso 85
9.2. Cuestión 86
9.3. Solución de los test verdadero/falso 86
9.4. Solución de la cuestión 88

TEMA IV. SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES **89**

1. Sucesiones funcionales **89**
1.1. Distancia entre funciones 89
1.2. Sucesión funcional 89
1.3. Convergencia simple o puntual 90
1.4. Convergencia uniforme 90
1.5. Sucesión de funciones continuas 91

2. Series funcionales **92**
2.1. Definición 92
2.2. Convergencia simple y uniforme 92
2.3. Criterio de la mayorante (Weierstrass) 93
2.4. Serie de funciones continuas 93
2.5. Integración de una serie de funciones 93
2.6. Derivación de una serie de funciones 93

3. Series de potencias **94**
3.1. Definición 94
3.2. Teorema de Cauchy-Hadamard 94
3.3. Continuidad, derivación e integración 96
3.4. Teoremas de Abel 97
3.5. Desarrollo de una función en serie de potencias. Serie de Taylor 99

4. Ejercicios de autoevaluación **101**
4.1. Test verdadero/falso 101
4.2. Cuestión 101
4.3. Solución del test verdadero/falso 102
4.4. Solución de la cuestión 102

TEMA V. LOS NÚMEROS COMPLEJOS **103**

1. Introducción **103**

2. Definición. Forma binómica. Operaciones básicas **103**

3. Forma trigonométrica. Representación gráfica **104**

4. Complejo conjugado, opuesto e inverso. Cociente **105**

5. Exponencial de un complejo. Fórmula de Euler **106**

6. Potencia natural. Fórmula de Moivre **107**

7. Raiz $n-$ésima de un complejo **107**

8. Teorema fundamental del Álgebra **108**

9. Ejercicios de autoevaluación **108**
9.1. Test verdadero/falso 108
9.2. Cuestión 108
9.3. Solución del test verdadero/falso 109
9.4. Solución de la cuestión 109

Tema I. Integración (01.02.2024)

1. Primitiva de una función

1.1. Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que $F : I \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en I si F es derivable en I y se cumple $F' = f$. En ese caso escribimos

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Si F es primitiva de f, serán primitivas las funciones $F + K,\ \forall K \in \mathbb{R}$ y sólo ellas. En efecto:

a) Si F es primitiva de f

$$(F + K)' = F' = f$$

luego $F + K$ es primitiva de f.

b) Si G es también primitiva de f, es decir $G' = f$, entonces

$$(G - F)' = G' - F' = 0 \Longrightarrow G - F = K \Longrightarrow G = F + K$$

luego G es de la forma $F + K$.

1.2. Funciones discontinuas con primitiva

Veremos más adelante que toda función continua tiene primitiva. Pero existen funciones discontinuas que tienen también primitiva. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene como derivada fuera del origen a $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. En el origen aplicamos la definición de derivada, obteniendo

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

luego f es derivable también en $x = 0$. Sin embargo, la función derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no tiene límite cuando $x \to 0$. Es decir, f' es discontinua, pero tiene como primitiva a f, $\forall x$. Luego existen funciones discontinuas que tienen primitiva.

Ejercicio. Estudia si se puede aplicar lo anterior a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1.3. Condición necesaria para la existencia de primitiva

Acabamos de ver que existen funciones discontinuas con primitiva, lo que no significa que cualquier función discontinua la tenga. Veremos a continuación que *es condición necesaria para que una función tenga primitiva en I que no tenga discontinuidades de salto en I.*

Demostración. Vamos a considerar una función derivable f, que será por tanto primitiva de su función derivada. Estudiaremos la continuidad de f'.

En primer lugar recordamos lo visto en "La derivada como límite de derivadas" (Cálculo Infinitesimal 1, tema IV, apdo. D.5):

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, definida en $I = [a, a+\delta)$. Si f es continua en I, derivable en $I \setminus \{a\}$ y $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, entonces f es derivable en a^+ y se cumple

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

(y la afirmación correspondiente para a^-).

Es decir que, si la función f' tiene algún límite lateral en a, la derivada lateral correspondiente de f en a tendrá el valor de dicho límite.

Por lo tanto, si una función f es derivable en I, en cada punto de I existirá la derivada, que coincidirá con las derivadas laterales en dicho punto

$$\forall x_0 \in I\, \exists\, f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

y tenemos dos opciones:

a) $\forall x_0 \in I$ existen los límites laterales de $f'(x)$, que deben coincidir con las derivadas laterales, por lo que coinciden entre sí y la función f' es continua en I.

b) En algún punto de I no existe alguno de los límites laterales, con lo que f' tiene en dicho punto una discontinuidad de 2ª especie.

Pero no puede ocurrir que existan límites laterales distintos pues serían iguales a las respectivas derivadas laterales, que coinciden.

Así pues, si una función es derivable, su derivada puede ser discontinua en algún punto, porque no exista algún límite lateral; pero no puede tener discontinuidades de salto (límites laterales distintos). Por lo tanto, **si una función tiene** en un punto $a \in I$ **una discontinuidad de salto**, podemos asegurar que **no tiene primitiva** en I.

Ejemplo. La función continua

$$F(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ 2x-3, & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

es primitiva de $y = E(x)$ (función Parte Entera) en los intervalos (0,1),(1,2) y (2,3). Pero acabamos de ver que $E(x)$ no posee primitiva en los puntos en que tiene discontinuidad de salto.

Efectivamente, la función F no es derivable en $x = 1$ y $x = 2$, los puntos de discontinuidad de $E(x)$, lo que está de acuerdo con lo afirmado por la condición necesaria.

Ejercicio 1. Dada f, derivable, ¿qué podemos afirmar de la continuidad de f? ¿y de f'?

Ejercicio 2. Sea la función Parte Decimal en el intervalo $[0, 3]$. Calcula su primitiva en los intervalos en que dicha primitiva exista.

2. La integral de Riemann

2.1. Partición de un intervalo

Dado un intervalo $I = [a, b]$, lo dividimos en n partes (iguales o distintas), intercalando $n-1$ puntos entre a y b. Se llama partición al conjunto de puntos

$$P(x_0, x_1 \dots x_n) \,/\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Relación entre particiones. Sean P y P'. Si todo punto de P está en P', se dice que P' es más fina que P o que P está contenida en P' $(P \subset P')$.

Se llama **diámetro** de P a la longitud de la mayor de las n partes en que se divide I:

$$\delta(P) = \text{máx}(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots n$$

La longitud de cada parte (o subintervalo) suele denotarse como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ejercicio. Comprueba que la relación $\subset$ entre particiones de I es de orden parcial.

2.2. Sumas de Darboux

Sea f, acotada en $I = [a, b]$. Sea una partición P de I. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ llamamos M_i al supremo y m_i al ínfimo de los valores de la función:

$$M_i = \sup f(x), \quad m_i = \text{ínf} f(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]_{i=1,2,\dots n}$$

Llamamos M y m respectivamente al supremo y el ínfimo de f en todo el intervalo:

$$M = \sup f(x), \quad m = \text{ínf} f(x), \quad x \in [a, b]$$

Entre los extremos de f en cualquier subintervalo y en el intervalo I se da la relación:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de donde, multiplicando cada término por Δx_i y sumando para $i = 1, 2, \dots, n$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i \tag{1}$$

En el primero y cuarto términos, sacamos factor común a m y M, y sumamos los Δx_i, obteniendo respectivamente $m(b-a)$ y $M(b-a)$.

Los términos segundo y tercero (suma de los productos de las longitudes de los subintervalos por los valores extremos de f en ellos), se llaman respectivamente **suma inferior y suma superior de Darboux** para la partición P del intervalo I.

$$\boxed{s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i} \quad ; \quad \boxed{S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}$$

y la desigualdad (1) se convierte en

$$\boxed{m(b-a) \leq s(P) \leq S(P) \leq M(b-a)} \tag{2}$$

que se cumple para toda partición P de I.

Propiedades. Las sumas de Darboux cumplen las propiedades siguientes (la primera es inmediata y se demuestra la tercera):

a) S y s están acotadas (superiormente por $M(b-a)$, inferiormente por $m(b-a)$).

b) Al tomar una partición P', más fina que P, la suma superior decrece y la inferior crece:

$$P \subset P' \Longrightarrow S(P) \geq S(P'), \quad s(P) \leq s(P')$$

c) Cualquier suma superior es mayor o igual que cualquiera inferior

$$\forall P_1, P_2 \Longrightarrow S(P_1) \geq s(P_2)$$

D: Definimos $P = P_1 \cup P_2$, con lo que $P_1 \subset P$ y $P_2 \subset P$. Entonces, aplicando la relación (2) (entre $s(P)$ y $S(P)$) y la propiedad **b)** (entre sumas correspondientes a distintas particiones), resulta

$$S(P_1) \geq S(P) \geq s(P) \geq s(P_2) \Longrightarrow S(P_1) \geq s(P_2), \quad \forall P_1, P_2$$

En la figura 1, las áreas de los rectángulos que contienen el área bajo la curva por exceso y por defecto representan las sumas de Darboux superior e inferior, respectivamente.

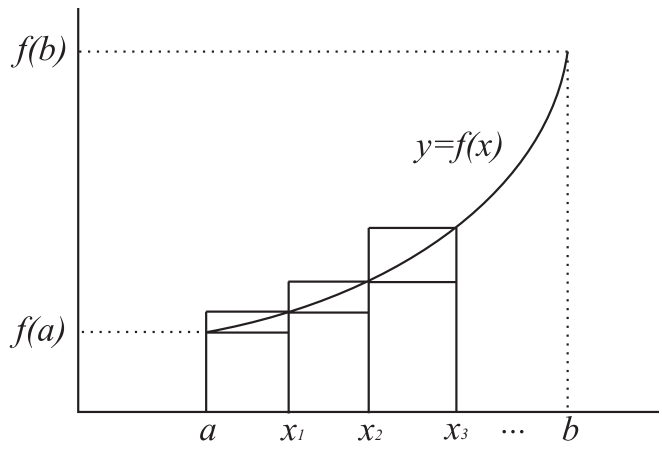


Figura 1: Sumas de Darboux.

2.3. Función integrable según Riemann

Tomamos ahora particiones $P_1, P_2, \ldots, P_m$, cada vez más finas, de modo que $\delta(P_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Obtendremos dos sucesiones de sumas de Darboux $\{S_m\}$ y $\{s_m\}$ y, aplicando la propiedad **b)**, se cumplirá:

- Las S_m forman una sucesión decreciente acotada inferiormente, luego convergen a un límite S, que se llama integral por exceso de f en I.

- Las s_m forman una sucesión creciente acotada superiormente, luego convergen a un límite s, que se llama integral por defecto de f en I.

(m es el subíndice de las distintas particiones y las sumas de Darboux correspondientes, por lo que no representa el número de puntos. Pero, si $m \to \infty$, el número de puntos también lo hace).

Decimos que f es integrable según Riemann en I si y sólo si $S = s$. En este caso a ese valor común se le llama Integral definida de Riemann de f en $[a, b]$:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$$

A partir del proceso seguido, observamos que, si f tiene signo constante entre a y b, el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje x es:

$$A_a^b = I(\,\text{si}\, f > 0); \quad A_a^b = -I(\,\text{si}\, f < 0)$$

Si f no tiene signo constante, la integral nos da el valor del **área neta**, en la que las partes por encima del eje x tienen signo positivo y las situadas por debajo, negativo.

Ejercicio. **a)** Demuestra que $y = E(x)$ es integrable en $[5/4, 7/4]$. **b)** Demuestra que la función de Dirichlet no es integrable.

2.4. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad

La condicion de integrabilidad enunciada consiste en que, al tomar particiones cada vez más finas, coincidan los límites de S_m y s_m, o que el límite de su diferencia sea nulo.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = I \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$$

Podemos expresar lo anterior diciendo que la diferencia entre los términos respectivos de ambas sucesiones se haga tan pequeña como queramos, si la partición es suficientemente fina, es decir

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists P \,\big/\, S(P) - s(P) < \varepsilon$$

(para cualquier partición más fina que P, se cumplirá la misma condición).
Teniendo en cuenta las expresiones de ambas sumas, vistas en **2.2**,

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ; \ S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

llegamos a la condición buscada: *Es condición necesaria y suficiente para que una función f, acotada en $[a, b]$, sea integrable en $[a, b]$ que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \,\big/\, \boxed{S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon}$$

siendo $M_i = \sup f(x),\ m_i = \text{ínf}\, f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]_{i=1,2,\ldots n}$

2.5. Condiciones suficientes de integrabilidad

Tres casos particulares en los que se cumple la condición anterior son los siguientes (puede verse la demostración en un documento de apoyo):

a) Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función Parte Entera.

b) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función Seno.

c) Toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Ejemplo: la función Parte Decimal (f es continua a trozos en $[a, b]$ si tiene en $[a, b]$ un número finito de puntos de discontinuidad, en ellos existen los límites laterales y son finitos).

Ejercicio. Encuentra ejemplos de funciones integrables en un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$: a) continua no monótona; b) monótona no continua; c) continua y monótona; d) no monótona ni continua.

2.6. Propiedades de la integral de Riemann

a) Sea f integrable en $[a,b]$, $a<b$. Se define

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx} \text{ de donde se obtiene } \boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

b) Sea f integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ y su integral es la suma de las integrales.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

La aditividad respecto al intervalo se cumple también aunque c no esté entre a y b. En efecto, sea f integrable en $[\alpha,\beta]$ y sean $a,b,c \in [\alpha,\beta] \,/\, a<b<c$. Entonces:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \overset{\text{a)}}{=} \int_a^b - \int_c^b \Longrightarrow \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

c) Sean f,g integrables en $[a,b]$. Se cumple:

- La combinación lineal de f y g es integrable en $[a,b]$. Su integral es la combinación lineal de las integrales.

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx} \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R})$$

- El producto $\boxed{f \cdot g}$ es integrable en $[a,b]$.
- Si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el cociente $\boxed{f/g}$ es integrable en $[a,b]$.
- Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx}$$

d) Si f es integrable en $[a,b]$, su valor absoluto $|f|$ también lo es y se cumple

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

3. Teorema de la media

Sea una función f, continua en $[a,b]$. Se cumple:

$$\exists\, \xi \in [a,b] \,/\, \boxed{f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Interpretación gráfica. Existe un valor de f que, multiplicado por la longitud del intervalo, nos da el área neta bajo la curva (ver fig. 2.a, donde se utiliza t en lugar de ξ).

Demostración. Al ser f continua en $I = [a, b]$, se cumple que: 1) alcanza en I un máximo M y un mínimo m (Weierstrass) y 2) es integrable en I (condición suficiente de integrabilidad). Entonces existe la integral de f entre a y b y resulta (apdo. **2.2**)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

La expresión acotada entre m y M es un valor comprendido entre dos que toma la función. Por la propiedad de Darboux del valor intermedio, si f alcanza los valores M y m, alcanzará cualquier valor comprendido entre ambos, es decir

$$\exists \xi \in [a, b] \,/\, f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 3]$. Suponiendo conocida la regla de Barrow (**4.3**), obtenemos el valor ξ:

$$f(\xi) = \xi^2 - 1 = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (x^2 - 1)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x \right)_1^3 = \frac{10}{3} \Longrightarrow \xi = \sqrt{13/3}$$

Ejercicio. Calcula ξ en $[1, 3]$ para $f(x) = 2x + 1$, justificando gráficamente el resultado.

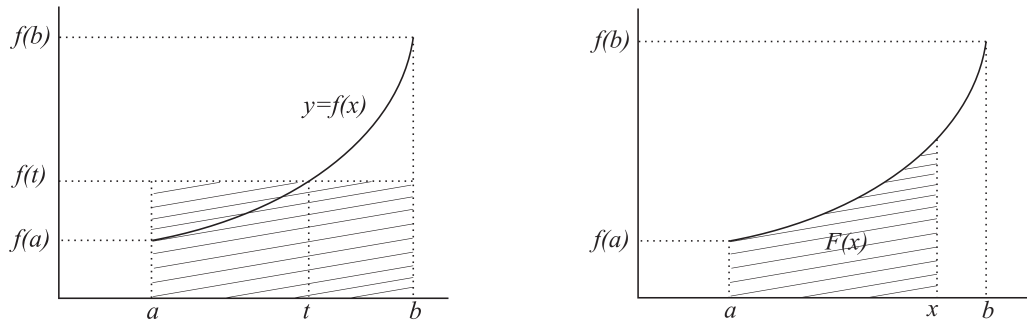


Figura 2: a) Teorema de la media. b) Función integral.

4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

4.1. Función integral

Sea la función f, integrable en $[a, b]$. Como hemos visto, el área neta limitada por la curva y el eje de abscisas entre dos puntos se obtiene calculando la integral de f entre dichos puntos. Por otro lado, el área entre el extremo a del intervalo y un punto cualquiera x, será función del valor de x. Definimos entonces la función integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

que nos da el valor del área neta desde el extremo del intervalo hasta el punto x (fig. 2.b).

Continuidad. La función integral es continua en $[a, b]$. Para demostrarlo, veamos que cumple la condición de continuidad en un punto cualquiera x_0 del intervalo.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

El segundo sumando está acotado, pues (apdo. **2.2**)

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)dt \leq M(x - x_0), \quad m = \text{ínf}(f),\, M = \sup(f),\, t \in [a, b]$$

Si además $x \to x_0$, ambas cotas tienden a 0, con lo que la integral tiende también a 0. Entonces, tomando límites, resulta

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \left(F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right) = F(x_0), \quad \forall x_0 \in [a, b]$$

por lo que $F(x)$ es continua en $[a, b]$.

4.2. Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, F es derivable en $[a, b]$ y se cumple $F' = f$.

luego la función integral F de una función continua f es primitiva de f.

Demostración. Para calcular $F'(x)$, obtenemos primero ΔF.

$$F(x + h) - F(x) = \int_{a}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x+h} f(t)dt + \int_{x}^{a} f(t)dt = \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

Dividiendo entre h y aplicando el teorema de la media,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)dt = f(\xi), \quad \xi \in [x, x + h]$$

Si ahora hacemos que h tienda a 0, $x + h$ tenderá a x, por lo que también ξ tenderá a x, al estar comprendido entre x y $x + h$. Pero, al ser f continua, si $\xi \to x$, entonces $f(\xi) \to f(x)$.
Así pues, tomando límites, resulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x) \Longrightarrow \boxed{F'(x) = f(x)}$$

Como consecuencia de este teorema, toda función continua tiene primitiva. Pero dicha primitiva no tiene necesariamente que estar formada por un número finito de términos: puede ser una serie de potencias, como veremos en el T. IV.

4.3. Corolario. Regla de Barrow

Si f es continua en $[a, b]$ y g es primitiva de f, entonces

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx = g(b) - g(a)}$$

Demostración. Al ser f continua, tiene como primitiva a su función integral F. Por hipótesis, g es también primitiva de f. Entonces, la diferencia de ambas será una constante, con lo que

$$F(x) - g(x) = K \Longrightarrow F(b) - g(b) = F(a) - g(a) = 0 - g(a)$$

pues $F(a) = \displaystyle\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$. Por lo tanto

$$F(b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Ejemplo. Obtenemos la función integral de la función coseno en $[0, 2\pi]$ y calculamos el área limitada por la curva y OX entre $x_1 = \pi/2$ y $x_2 = 3\pi/2$.

$$F(x) = \int_0^x \cos t\, dt = \operatorname{sen} t\Big|_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \operatorname{sen} 3\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2 \Longrightarrow A\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} = |-2| = 2$$

Como el coseno es negativo entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, el área es el valor absoluto de la integral.
Vemos que el área neta entre dos puntos es la diferencia entre los valores de $F(x)$ en ambos.
Este resultado era de esperar, pues $\displaystyle\int_b^c f(x)dx = \int_0^c f(x)dx - \int_0^b f(x)dx = F(c) - F(b)$.

Ejercicio. Si $I = [0, \pi/4]$, obtén la función integral y el área comprendida entre los extremos: **a)** $f_1(x) = 3x^2$ $\big(F_1(x) = x^3,\ A_1 = \pi^3/64\big)$; **b)** $f_2(x) = \tan x$ $\big(F_2(x) = -\ln\cos x,\ A_2 = \ln\sqrt{2}\big)$.

5. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si f es integrable en $[a, b]$ y existe $g \,\big/\, g' = f$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Este teorema puede considerarse una generalización de la Regla de Barrow, pues permite calcular la integral de f entre a y b como diferencia de los valores de una primitiva suya g en dichos puntos. Pero ahora sólo se pide que f sea integrable y tenga primitiva, lo que no exige que f sea continua (ver apdo. **1.2**). El teorema se demuestra en un documento de apoyo.

6. Integrales impropias

Hemos obtenido la integral definida para funciones acotadas en intervalos cerrados, por tanto compactos. Si el intervalo no es compacto o f no está acotada en él, llamamos impropias a esas integrales y las resolvemos con un paso al límite. Es decir, calculamos el límite del valor de la integral cuando uno de los extremos de integración tiende a infinito o bien al punto en que f no está definida (tomaría valor infinito).

Ejemplo. Calculamos la integral de $f(x) = 1/x^2$: a) entre 0 y 1; b) entre 1 e ∞.

a) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0}\left(-1 + \frac{1}{a}\right) = +\infty$$

b) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

El resultado de b) se puede interpretar geométricamente diciendo que el triángulo mixtilíneo determinado por la curva y el eje x a partir de $x = 1$ tiene perímetro infinito, pero área finita. En cambio, en el caso a) tanto el área como el perímetro de la figura son infinitos.

Ejercicio 1. Integra $f(x) = 1/\sqrt{x}$: **a)** entre 0 y 1 ($I = 2$); **b)** entre 1 e ∞ ($I = \infty$).

Ejercicio 2. Calcula la integral de **a)** $f(x) = e^x$ entre $-\infty$ y 0 ($I = 1$); **b)** $g(x) = \ln x$ entre 0 y 1 ($I = -1$). Teniendo en cuenta que el logaritmo neperiano es la función inversa de la exponencial de x, razona si era esperable el resultado obtenido.

7. Ejercicios de autoevaluación

7.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Una función discontinua en $I = [a, b]$ puede tener primitiva en I. Esta debe ser continua.

2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad de salto en el punto $a \in I$, la función no tiene primitiva en I. Es decir, no existe ninguna función $F : I \to \mathbb{R}$ / $F' = f$ en I.

3. Una función es integrable en $I = [a, b]$ si y sólo si es continua.

4. Si f y g son integrables en $I = [a, b]$, y se cumple $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

5. Si f es continua en $I = [a, b]$, su función integral F es primitiva de f en I.

6. La Regla de Barrow puede aplicarse a la función Parte Entera de x.

7.2. Cuestión

Hemos obtenido el concepto de integral definida para funciones acotadas en un intervalo compacto. ¿Cómo procedemos para estudiar la integral de una función en un intervalo no acotado? Aplíquese a la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

7.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V**. Una función discontinua en $I = [a, b]$ puede tener primitiva en I, siempre que la discontinuidad no sea de salto (ver apdo. **1.2**). Pero si la función tiene primitiva, esta será derivable y por tanto continua.

2. **V**. La derivada de una función puede ser discontinua, siempre que la discontinuidad no sea de salto. Entonces, si f tiene una discontinuidad de salto, no puede ser la derivada de otra función, luego no tendrá primitiva (ver apdo. **1.3**).

3. **F**. Si f es continua, es integrable; pero no viceversa. Por ejemplo, la función Parte Decimal $y = x - E(x)$ es discontinua en los puntos correspondientes a valores enteros de x. Y es integrable entre a y b, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (ver apdo. **2.5**).

4. **V**. La integración de funciones conserva el orden (ver apdo. **2.6**).

5. **V**. Es lo que afirma el primer Teorema Fundamental del Cálculo (ver apdo. **4**).

6. **F**. La Regla de Barrow se aplica a funciones continuas.

7.4. Solución de la cuestión

En estos casos obtenemos la integral definida en un intervalo cerrado, sustituyendo el extremo no acotado por un valor genérico. Luego se calcula el límite de la expresión resultante, cuando el extremo tiende a infinito. Si existe límite finito, la integral impropia es convergente.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{m \to -\infty} \int_{m}^{0} e^x dx = \lim_{m \to -\infty} \left(e^0 - e^m \right) = 1 - \lim_{m \to -\infty} e^m = 1 - 0 = 1$$

Tema II. Funciones vectoriales (05.03.2024)

1. Introducción. Tipos de funciones

Hasta ahora hemos trabajado con funciones reales de variable real, es decir que tanto la variable x como su imagen $f(x)$ son números reales

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad x \to f(x)$$

En este tema estudiaremos funciones vectoriales de variable vectorial, en las que tanto la variable $\vec{x}$ como su imagen $\vec{f}(\vec{x})$ serán vectores

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \to \vec{f}(\vec{x}), \text{ siendo } \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_n) \end{Bmatrix}$$

Antes de estudiar el caso general, veremos dos casos particulares (el segundo de ellos en detalle):

a) Funciones vectoriales de variable real.

$$\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m. \quad \text{Ejemplo: } \vec{r}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \text{ (vector de posición)}$$

b) Funciones reales de variable vectorial.

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \quad \text{Ejemplo: } T(\vec{r}) = T(x, y, z) \text{ (función temperatura)}$$

Nota. Un vector se puede denotar en negrita ($\mathbf{v}$) o con una flecha ($\vec{v}$). Asimismo sus componentes se pueden escribir como fila o como columna. La primera forma suele ser más cómoda y la segunda más clara, por ejemplo al desarrollar la expresión de $\vec{f}(\vec{x})$. En ocasiones convendrá escribirlo como columna, por ejemplo al premultiplicarlo por una matriz.

2. Espacio euclídeo

En este apartado repasaremos algunos conceptos de Álgebra que vamos a utilizar en el tema. Sea $\mathbb{R}^p$ el conjunto de las agrupaciones de p números reales

$$\mathbb{R}^p = \big\{(x_1, \dots, x_p) \big/ x_i \in \mathbb{R};\ i = 1, 2 \dots p\big\}$$

Se demuestra que $\mathbb{R}^p$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Definimos tres aplicaciones.

2.1. Producto escalar ordinario

Es una aplicación de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, que asocia un número real a cada par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, \dots, x_p) \\ \vec{y} &= (y_1, \dots, y_p) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p = \sum_{i=1}^{p} x_i\, y_i$$

Propiedades. (Son las propiedades constitutivas de cualquier producto escalar).

a) Positividad: $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0,\ \forall \vec{x} \neq \vec{0};\quad \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.

b) Conmutatividad: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$.

c) Distributividad de $\cdot$ respecto a $+$: $\vec{x} \cdot (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \beta(\vec{x} \cdot \vec{z}),\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^p;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Llamamos **espacio euclídeo** a un espacio vectorial dotado del producto escalar ordinario.

2.2. Norma euclídea

Es una aplicación (también llamada módulo) de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que asocia un número real positivo o nulo a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_p)^2}$$

Propiedades.

a) Positividad: $\|\vec{x}\| > 0,\ \forall \vec{x} \neq \vec{0};\quad \|\vec{0}\| = 0.$

b) Producto por un escalar: $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda|\, \|\vec{x}\|,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

c) Desigualdad triangular: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|,\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p.$

2.3. Distancia euclídea

Es una aplicación de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, que asocia un número real positivo o nulo a cada par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p$.

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2}$$

Propiedades.

a) Positividad: $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0,\ \forall \vec{x} \neq \vec{y};\quad d(\vec{x}, \vec{x}) = 0.$

b) Simetría: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}),\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^p.$

c) Desigualdad triangular: $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}),\ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^p.$

3. Funciones vectoriales de variable real

Estas funciones son vectores de m componentes, cada una de ellas función de una variable, definidas en un dominio D. El punto genérico $a \in D$ debe tener puntos de D tan próximos como se quiera, para poder calcular el límite de $\vec{f}$ cuando $x \to a$, luego debe ser de acumulación de D.

$$\boxed{\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad a \in D' \cap D}$$

Veamos que **un vector tiene límite si y sólo si lo tienen cada una de sus m componentes**.

Demostración. Sea $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)$ y sea $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$. Decimos que $\vec{x}$ tiene límite $\vec{a}$ (cuando $t \to t_0$), si $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ puede hacerse tan pequeño como queramos (para t suficientemente cerca de t_0), es decir, si

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$$

Por otro lado, cada componente $x_j(t)$ tiene límite a_j (cuando $t \to t_0$), si $|x_j - a_j|$ puede hacerse también tan pequeño como queramos (para t suficientemente cerca de t_0), es decir, si

$$|x_j - a_j| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Estudiamos la relación que existe entre $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ y $|x_j - a_j|$.

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} \geq \begin{cases} \sqrt{(x_1 - a_1)^2} = |x_1 - a_1| \\ \qquad\vdots \\ \sqrt{(x_m - a_m)^2} = |x_m - a_m| \end{cases}$$

Es decir

$$\|\vec{x}-\vec{a}\| \geq |x_j - a_j|\,, \quad j=1,2,\dots,m$$

Entonces, si $t \to t_0$, resulta que

1) Si $\|\vec{x}-\vec{a}\| < \varepsilon$ entonces $|x_j - a_j| < \varepsilon$

2) Si $|x_j - a_j| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, entonces $\|\vec{x}-\vec{a}\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (x_j - a_j)^2} < \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$

Luego un vector $\vec{x}$ tiene límite $\vec{a} = \{a_j\}_{j=1,\dots,m}$ si y sólo si cada componente x_j tiene límite a_j. Este resultado permite reducir el estudio del límite de una función vectorial al de los límites de sus componentes. Además, las condiciones de continuidad y diferenciabilidad se expresan en forma de límite, por lo que **una función vectorial cumplirá estas condiciones si y sólo si las cumple cada una de sus componentes**.

3.1. Límite

Decimos que una función $\vec{f}$ tiene límite $\vec{\varphi}$ en $x=a$ si para valores de x suficientemente próximos a a, $\vec{f}(x)$ está de $\vec{\varphi}$ tan cerca como queramos. Es decir

$$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{\varphi} \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta \implies \|\vec{f}(x) - \vec{\varphi}\| < \varepsilon$$

Como acabamos de ver, este límite existe si existe el de cada componente, luego el límite de la función vectorial $\vec{f}$ es un vector cuyas componentes son los límites de las componentes de $\vec{f}$.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \left\{\lim_{x\to a} f_j(x)\right\}_{j=1,\dots,m}}$$

3.2. Continuidad

La condición de continuidad en forma de límite dice que $\vec{f}$ es continua en a si su límite cuando $x \to a$ coincide con $\vec{f}(a)$. Pero esto equivale a que el límite de cada componente de $\vec{f}$ sea la correspondiente componente de $\vec{f}(a)$, por lo que cada componente debe ser continua en a:

$$\boxed{\vec{f} \text{ continua en } a} \iff \lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{f}(a) \iff \lim_{x\to a} f_j(x) = f_j(a)\,_{j=1,\dots,m} \iff \boxed{f_j \text{ continua en } a}$$

3.3. Diferenciabilidad

Sea a un punto interior del dominio D de $\vec{f}$. Cada una de las m componentes f_j de $\vec{f}$ es una función real de variable real, por lo que su condición de diferenciabilidad en a es

$$f_j(x) - f_j(a) = [g_j + \varepsilon_j(x-a)](x-a) \quad \left(\text{siendo } g_j = \frac{df_j}{dx}(a) \text{ y } \lim_{x\to a} \varepsilon_j(x-a) = 0\right)$$

La condición de diferenciabilidad de $\vec{f}$ en a se obtiene componiendo las condiciones para las m componentes, es decir escribiendo la condición para $j=1,2,\dots,m$ y agrupando los distintos términos f_j como $\vec{f}$, g_j como $\vec{g}$, etc. Resulta

$$\boxed{\vec{f}(x) - \vec{f}(a) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(x-a)](x-a)} \quad \left(\lim_{x\to a} \vec{\varepsilon}(x-a) = \vec{0}\right)$$

El vector $\vec{g}$ es la derivada de $\vec{f}$. La diferencial de $\vec{f}$ es el producto de $\vec{g}$ por la diferencial de x.

$$\boxed{\vec{g} = \frac{d\vec{f}}{dx}(a)}\,; \quad \boxed{d\vec{f} = \vec{g}\,dx}\,; \quad \{g_j\}_{j=1,\dots,m} = \left\{\frac{df_j}{dx}\right\}_{j=1,\dots,m}$$

Ejemplo. Sea el vector de posición $\vec{r}(t) = \{t, 2t^2, 3t^3\}$. Vamos a obtener su límite y comprobar la continuidad en $t = 1$; calcular sus dos primeras derivadas y su diferencial.

a) $\lim\limits_{t\to 1} \vec{r}(t) = \{1, 2, 3\} = \vec{r}(1)$. Cada componente, y por tanto $\vec{r}(t)$, es una función continua.

b) $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \{1, 4t, 9t^2\}$; $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \{0, 4, 18t\}$; $d\vec{r} = \{dt, 4tdt, 9t^2dt\}$.

Ejercicio. Haz lo mismo con $\vec{r}(t) = \left\{\sqrt{t}, 2/t, \operatorname{sen} 3t\right\}$.

4. Funciones reales de variable vectorial

Estudiamos ahora funciones reales cuya variable es un vector de n componentes, por lo que el dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Como en **3**, el punto $\vec{a} \in D$ debe ser de acumulación de D.

$$\boxed{f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad a \in D' \cap D}$$

4.1. Límite.

a. Límite funcional.

Decimos que una función f tiene límite φ en $\vec{x} = \vec{a}$ si para valores de $\vec{x}$ suficientemente próximos a $\vec{a}$, $f(\vec{x})$ está de φ tan cerca como queramos.

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \varphi} \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,/\, 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Longrightarrow |f(\vec{x}) - \varphi| < \varepsilon}$$

b. Límite direccional.

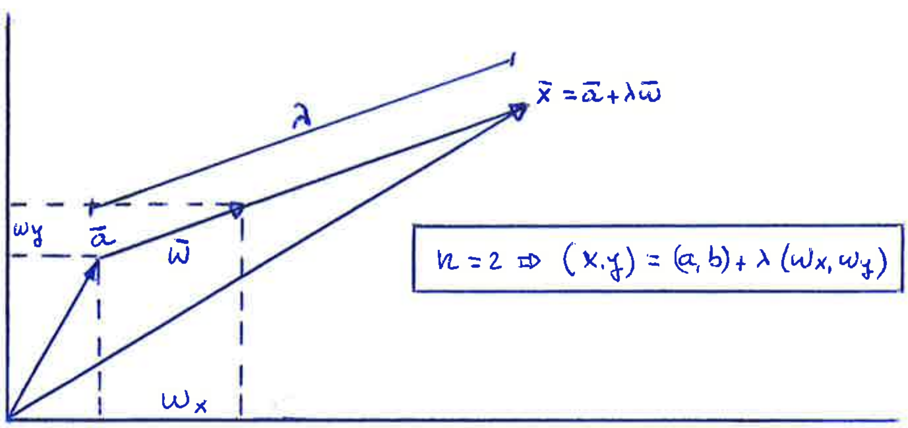
Al tener el conjunto de las variables dimensión $n > 1$, podemos acercarnos al punto $\vec{a}$ a través de distintos subconjuntos, es decir dando valores a $\vec{x}$ sólo en dichos subconjuntos. El más sencillo está formado por una cualquiera de las rectas que pasan por $\vec{a}$, que determinamos por medio de su vector unitario $\vec{\omega}$, es decir

$$E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\omega}, \lambda \in \mathbb{R}, \|\vec{\omega}\| = 1\right\}$$

Entonces el límite direccional de f en $\vec{a}$, según la dirección dada por $\vec{\omega}$ es

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a},\, \vec{x}\in E} f(\vec{x}) = \lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega})}$$

Para calcularlo, escribimos $\vec{x}$ como $\vec{a} + \lambda\vec{\omega}$ y calculamos el límite de f cuando $\lambda \to 0$.



Ejemplo. Estudiamos el límite direccional en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

Un punto genérico (x,y), en función del unitario (ω_x, ω_y) y del punto $(a,b) = (0,0)$, toma la forma

$$(x,y) = (a,b) + \lambda(\omega_x, \omega_y) \Longrightarrow \begin{cases} x = \cancel{a} + \lambda\omega_x = \lambda\omega_x \\ y = \cancel{b} + \lambda\omega_y = \lambda\omega_y \end{cases}$$

Con lo que

$$L = \lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega}) = \lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda\omega_x}{\lambda\omega_x + \lambda\omega_y} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\cancel{\lambda}\omega_x}{\cancel{\lambda}(\omega_x + \omega_y)} = \frac{\omega_x}{\omega_x + \omega_y}$$

Vemos que el límite L depende de la dirección. Lo calculamos para distintos casos:

- Eje OX: $\vec{\omega} = (1,0) \Longrightarrow L = 1$.
- Eje OY: $\vec{\omega} = (0,1) \Longrightarrow L = 0$.
- Recta $y = x$: $\omega_x = \omega_y \Longrightarrow L = 1/2$.

Ejercicio. En el ejemplo anterior, el límite en el origen según el eje y vale 0. ¿Hay alguna otra dirección según la cual sea nulo? ¿Según qué dirección el límite en $(0,0)$ vale $L = -1$?

c. Relación entre el límite funcional y los direccionales.

Si se cumple la condición de límite funcional, debe cumplirse cuando nos aproximamos al punto por cualquier subconjunto particular. Entonces:

- Si existe límite funcional, existen los direccionales y coinciden.
- Si los direccionales no existen o no coinciden, no existe límite funcional.
- Si los direccionales existen y coinciden, **puede** existir el límite funcional. Si existe, tomará ese valor.

d. Obtención del límite funcional en dos variables.

Como vemos, en ciertos casos se puede asegurar que el límite funcional no existe; en otros que, si lo hace, toma un determinado valor, lo que no nos asegura que exista.

En funciones de dos variables podemos demostrar directamente la existencia utilizando coordenadas polares con el polo en el punto $\vec{a} = (a,b)$: como en la condición de límite hacemos que $\vec{x}$ esté de $\vec{a}$ tan cerca como se quiera, imponemos la condición de que $\rho \to 0$, para un valor de θ cualquiera y estudiamos el límite de la función de (ρ, θ). Es decir, escribimos

$$x - a = \rho\cos\theta, \quad y - b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y calculamos

$$\lim_{\rho\to 0} f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Si este límite existe $\forall\,\theta$, habremos demostrado que existe límite sea cual sea el modo de aproximación al punto, por lo que la función tiene límite en (a,b).

Ejemplo. Estudiamos en el origen los límites direccionales y funcional de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Límites direccionales. Al ser $(a,b) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (\lambda\omega_x, \lambda\omega_y)$, luego

$$\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^3\omega_y^3}{\lambda^2(2\omega_x^2+\omega_y^2)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda\,\omega_y^3}{1+\omega_x^2} = 0$$

luego puede existir límite funcional, en cuyo caso será nulo.

b) Límite funcional. Haciendo $x = 0 + \rho\cos\theta,\ y = 0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, resulta, $\forall\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\,\mathrm{sen}^3\,\theta}{\rho^2(2\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\,\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\,\mathrm{sen}^3\,\theta}{1+\cos^2\theta} = 0$$

Pueden verse otros ejemplos en los documentos de apoyo.

Ejercicio. Comprueba que la función g tiene límites direccionales y funcional nulos en $(0,0)$.

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.2. Continuidad

Decimos que f es continua en $\vec{x} = \vec{a}$ si su límite cuando $\vec{x} \to \vec{a}$ coincide con $f(\vec{a})$, es decir

$$\boxed{f \text{ es continua en } \vec{a} \Longleftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})}$$

4.3. Derivada direccional y derivada parcial

Como paso previo al estudio de la condición de diferenciabilidad de una función analizaremos los conceptos de derivada direccional y parcial en un punto $\vec{a}$ interior del dominio, $\vec{a} \in \mathring{D}$.

a. Derivada direccional.

Como hicimos en (**b**) nos aproximaremos al punto $\vec{a}$ a lo largo de una de las rectas que pasan por $\vec{a}$, lo que da lugar al concepto de derivada direccional. Escribimos $\vec{x}$ como

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \|\vec{\omega}\| = 1$$

Si $\lambda \to 0$, entonces $\vec{x} \to \vec{a}$, a lo largo de la recta determinada por $\vec{\omega}$. La derivada direccional de f en $\vec{a}$ según la dirección dada por $\vec{\omega}$, será el límite del cociente del incremento de f y λ:

$$\boxed{D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{a}+\lambda\vec{\omega}) - f(\vec{a})}{\lambda}}$$

La diferencia $\vec{x} - \vec{a}$ es igual a $\lambda\vec{\omega}$, de módulo $|\lambda|$. Si $\lambda > 0$ $\vec{x}$ se encuentra, respecto de $\vec{a}$, en la dirección dada por $\vec{\omega}$. Si $\lambda < 0$, está en el lado opuesto. Es decir, nos acercamos a $\vec{a}$, a lo largo de una recta, desde los dos lados posibles, como en las derivadas laterales de funciones de una variable (pero ahora existen infinitas direcciones dadas por $\vec{\omega}$).

Obsérvese que λ representa la distancia entre $\vec{x}$ y $\vec{a}$ con signo: positivo si $\vec{x}$ está en la dirección de $\vec{\omega}$, negativo en caso contrario.

Ejemplo. Calculamos la derivada direccional en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Al ser $\vec{a}=(0,0)$, $\vec{a}+\lambda\vec{\omega}=(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)$ y la derivada direccional $D_{\vec{\omega}}f(\vec{a})$ vale

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda\omega_x,\lambda\omega_y)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{(\lambda\omega_x)^3+(\lambda\omega_y)^3}{(\lambda\omega_x)^2+(\lambda\omega_y)^2}-0\right)\frac{1}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^3(\omega_x^3+\omega_y^3)}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)}\frac{1}{\lambda}=\omega_x^3+\omega_y^3$$

Nota. La derivada direccional depende en general de la dirección de aproximación al punto, al revés que el límite direccional en funciones continuas, que no lo hace.

Ejercicio. Calcula la derivada direccional en $(0,0)$ de las funciones

$$\text{a) } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases};\quad \text{b) } g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\operatorname{sen}y+y^2\operatorname{sen}x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución. a) $D_{\vec{\omega}}f(0,0)=2\omega_x^3-\omega_y^3$; b) $D_{\vec{\omega}}\,g(0,0)=\omega_x^2\omega_y+\omega_y^2\omega_x$.

b. Derivada parcial

Si tomamos como vector $\vec{\omega}$ uno cualquiera de la base canónica, estaremos acercándonos de $\vec{x}$ a $\vec{a}$ modificando sólo una variable, por lo que a este caso particular de derivada direccional se le llama derivada parcial. En dos o tres dimensiones, esto supone acercarnos al punto $\vec{a}$ según la dirección de uno de los ejes.
En el caso general, los posibles vectores y las variables que se modifican son:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1&=(1,0,0\ldots0,0)\Longrightarrow \text{ modificamos } x_1\\ \vec{\omega}_2&=(0,1,0\ldots0,0)\Longrightarrow \text{ modificamos } x_2\\ &\vdots\\ \vec{\omega}_i&=(0,\ldots1\ldots,0)\Longrightarrow \text{ modificamos } x_i\\ &\vdots\\ \vec{\omega}_n&=(0,0,0\ldots0,1)\Longrightarrow \text{ modificamos } x_n\end{aligned}$$

con lo que la expresión de la derivada parcial respecto a la variable x_i es

$$\boxed{D_{\vec{\omega}_i}f(\vec{a})=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_i+\lambda,\ldots a_n)-f(a_1,\ldots a_n)}{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})}$$

Si $\forall\vec{x}$ del dominio existe la $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, se le llama función derivada parcial de f respecto de x_i en D. Se denota también f'_{x_i}.
En la práctica, para calcular la derivada parcial de una función con expresión única en su dominio, se deriva sólo respecto a una de las variables, considerando constantes a las demás.

Ejemplo. Sea $u(x,y,z)=x^2yz^3$. Sus derivadas son: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xyz^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2z^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=3x^2yz^2$.

Ejercicio. Calcula en $P(-1,1)$ las derivadas parciales de las funciones

a) $\dfrac{y}{x^2}$ $\Big(\text{Sol: }(2,1)\Big)$; b) $x\arctan y$ $\Big(\text{Sol: }(\pi/4,-1/2)\Big)$; c) $\dfrac{y}{x}e^{xy}$ $\Big(\text{Sol: }(-2/e,0)\Big)$.

4.4. Diferencial

En funciones reales de una variable exigimos como condición de diferenciabilidad que el incremento de la función se aproxime bien por una función lineal (la diferencial), que es el producto de la derivada de la función por el incremento (o diferencial) de la variable.

En funciones de n variables vamos a proceder de modo análogo, pero -como veremos- la derivada respecto de la variable vectorial será un vector de n componentes y la diferencial (su producto por el incremento de la variable) se obtendrá como un producto escalar.

Sea $\vec{a}$ un punto interior del dominio D. Decimos que f es diferenciable en $\vec{x} = \vec{a}$ si y sólo si se cumple la condición

$$\boxed{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\vec{x} - \vec{a})] \cdot (\vec{x} - \vec{a})}$$

Si f es diferenciable, el vector $\vec{g}$ se llama derivada total de f o vector gradiente. Y la diferencial de f es el producto (escalar) de la derivada de la función por la diferencial de la variable.

$$\boxed{\vec{g} = \left.\frac{df}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} ; \quad df = \vec{g} \cdot d\vec{x}}$$

Antes de calcular las componentes de la derivada total vamos a obtener la derivada de una función diferenciable según una cierta dirección.

Derivada direccional de una función diferenciable. Sustituimos en la fórmula de la derivada direccional el incremento de f por la expresión de dicho incremento en la condición de diferenciabilidad (teniendo en cuenta que $\vec{x} - \vec{a} = \lambda\omega$). Resulta

$$D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{a} + \lambda\omega) - f(\vec{a})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{[\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\lambda\vec{\omega})] \cdot (\cancel{\lambda}\vec{\omega})}{\cancel{\lambda}} = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$$

expresión que nos dice que la derivada según una cierta dirección de una función diferenciable se obtiene como producto escalar del gradiente por el vector unitario de la dirección.

Componentes de la derivada total. Para obtenerlas, calculamos la derivada direccional respecto al vector $\vec{\omega}_i$ de la base canónica (es decir, la derivada parcial respecto a x_i), resultando

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{\vec{\omega}_i} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}_i = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) \cdot (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) = g_i$$

Es decir, cada componente g_i es la derivada parcial de f respecto a la variable x_i, por lo que la derivada total de una función diferenciable está formada por las n derivadas parciales

$$\vec{g} = \frac{df}{d\vec{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

a partir de la cual obtenemos la diferencial de f

$$df = \vec{g} \cdot d\vec{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \big(dx_1, \ldots, dx_n\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Ejemplo. Calculamos la diferencial en $P(1,1,1)$ de la función $u(x,y,z) = x^2yz^3$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 2xyz^3 dx + x^2z^3 dy + 3x^2yz^2 dz \overset{P}{=} 2dx + dy + 3dz$$

Ejercicio. Hallar la diferencial en $P(1,1,\pi)$ de las funciones de 3 variables

a) $f = \operatorname{sen} xyz$ $\;(df_P = -\pi dx - \pi dy - dz)$; b) $g = \sqrt{xyz}$ $\left(dg_P = \frac{\sqrt{\pi}}{2} dx + \frac{\sqrt{\pi}}{2} dy + \frac{dz}{2\sqrt{\pi}} \right)$

4.5. Gradiente y curvas de nivel. Interpretación geométrica

El vector gradiente $\vec{g}$ (o $\vec{\nabla} f$) nos indica la dirección de crecimiento más rápido de la función. Es decir, cómo debemos modificar las variables para que f crezca de la forma más rápida posible.

Demostración (para 2 ó 3 variables). El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene como producto de sus módulos (normas) por el coseno del ángulo que forman. Como la derivada de f según la dirección de $\vec{\omega}$ es el producto escalar del gradiente por $\vec{\omega}$, resulta

$$D_{\vec{\omega}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{\omega} = \|\vec{\nabla} f\| \, \|\vec{\omega}\| \cos\varphi = \|\vec{\nabla} f\| \cos\varphi$$

Este producto será máximo si el coseno vale 1, lo que corresponde a un ángulo φ nulo entre $\vec{\nabla} f$ y $\vec{\omega}$, es decir que $\vec{\omega}$ es paralelo a $\vec{\nabla} f$ (el producto valdrá 0 si $\varphi = \pi/2$). Por lo tanto, la variación de f según la dirección de $\vec{\nabla} f$ es máxima y es nula en la dirección perpendicular.

Ejemplo en 2 variables. Sea la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, cuya representación gráfica es un paraboloide con vértice en el origen. Sea $P = (1, 1)$. El vector gradiente es

$$\vec{\nabla} f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y) \stackrel{P}{=} (2, 2)$$

Esto significa que, al modificar las variables (x, y) –a partir de sus valores en P– según la dirección del vector $(2, 2)$, el incremento del valor de f es máximo. Efectivamente, al movernos según dicha dirección, el punto correspondiente en la superficie sube por la línea de máxima pendiente.

Por el contrario, si nos movemos en la dirección perpendicular a $\vec{\nabla} f$ en cada punto, vamos recorriendo una curva en la que la función no varía, es decir toma el mismo valor que en $P(1, 1)$. Su ecuación será $f(x, y) = f(1, 1)$, es decir la circunferencia $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Hemos obtenido así una **curva de nivel** (*lugar geométrico de los puntos en los que la f es constante*).

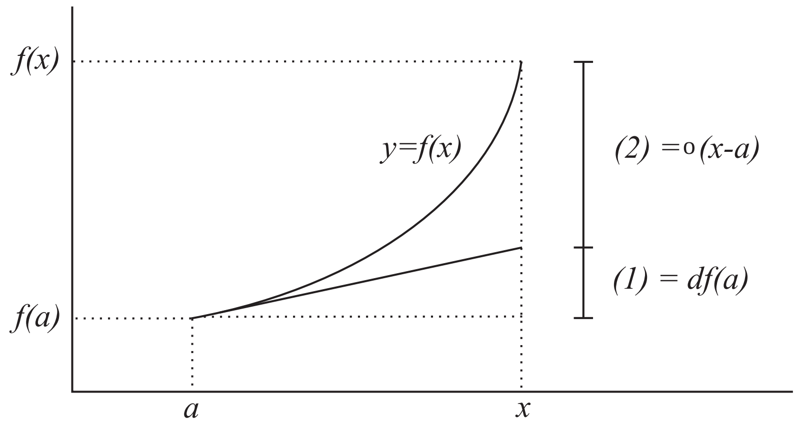
Vemos que el gradiente de f en P es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por P.

Interpretación geométrica de la diferencial (funciones de 2 variables). En funciones de una variable interpretábamos geométricamente la diferencial como el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva cuando la variable se incrementa $x - a$ (ver figura).
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a) = df(a)$$

En dos variables la interpretación es análoga: la diferencial representa el incremento de la coordenada vertical del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ al pasar de $P(a, b)$ a $P'(a+dx, b+dy)$.
La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ es

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) \Leftrightarrow z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) = df(a, b)$$



4.6. Teoremas de diferenciabilidad

Sea la función $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\vec{a}$ un punto interior del dominio. Los siguientes teoremas son muy útiles en el estudio de funciones de varias variables.

a. Condición suficiente de diferenciabilidad

Si f tiene derivadas parciales en un entorno de $\vec{a}$ y son continuas en $\vec{a}$, entonces f es diferenciable en $\vec{a}$ (si las derivadas parciales de f son continuas se dice que $f \in C^1$).

Nota. Esta condición es suficiente, pero no necesaria. De hecho, pueden exigirse menos condiciones aún: se demuestra que si las n derivadas parciales existan en un entorno de $\vec{a}$ y $n-1$ de ellas son continuas en $\vec{a}$, f es diferenciable en $\vec{a}$.

b. Condición necesaria de diferenciabilidad

Si f es diferenciable en $\vec{a}$, sus derivadas direccionales en $\vec{a}$ existen y toman el valor

$$\boxed{D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \vec{g} \cdot \vec{\omega}} \quad \text{siendo } \vec{g} = \left.\frac{df}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}$$

Las derivadas direccionales dependen en general de la dirección, no como los límites direccionales de funciones continuas. No obstante, se demuestra que si una función diferenciable alcanza un extremo en un punto $\vec{a}$ interior del dominio, sus derivadas direccionales en $\vec{a}$ son nulas.

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Al haber más de una variable, existen otros modos de aproximarse a un punto, además de las rectas que pasan por él, por lo que la existencia de derivadas direccionales no implica la diferenciabilidad.

c. Relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Si f es diferenciable en un punto, es continua en dicho punto, pero no viceversa.

En efecto, tomando límites en la condición de diferenciabilidad,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}(\vec{x} - \vec{a})] \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \Longrightarrow \boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})}$$

La existencia de derivadas direccionales, que no asegura la diferenciabilidad, tampoco asegura la continuidad. Si f admite derivada en una dirección, el límite de f en $\vec{a}$ coincidirá con $f(\vec{a})$ sólo en esa dirección.

Ejemplo. Vamos a aplicar los teoremas anteriores a tres funciones, obteniendo sus derivadas parciales de distintos modos. Sean las funciones f_1, f_2 y f_3:

$$f_1 = x^2 + y^2; \quad f_2 = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f_3 = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comprobaremos que:

1. f_1 cumple la condición suficiente de diferenciabilidad en $\vec{a}\,(1,1)$, luego es diferenciable en dicho punto y cumple en él la condición necesaria de diferenciabilidad.

2. f_2 tiene derivadas direccionales en el origen, pero no es diferenciable en dicho punto, pues no cumple en él la condición necesaria de diferenciabilidad.

3. f_3 tiene derivadas parciales en el origen, aunque no es continua en dicho punto.

Solución.

1. $f_1 = x^2+y^2$. Al estar definida en todo $\mathbb{R}^2$, obtenemos sus derivadas parciales directamente:
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$
Las derivadas parciales son continuas (condición suficiente), por lo que f_1 es diferenciable, como ya sabíamos por ser polinómica. Su gradiente en $\vec{a}$ vale $\vec{\nabla} f_1(1,1) = (2,2)$.

   Calculamos la derivada direccional en $\vec{a}$.
$$D_{\vec{\omega}} f_1(\vec{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_1(\vec{a}+\lambda\vec{\omega}) - f_1(\vec{a})}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(1+\lambda\omega_x)^2 + (1+\lambda\omega_y)^2 - 2}{\lambda} = 2\omega_x + 2\omega_y$$
observando que se cumple la condición necesaria de diferenciabilidad.
$$D_{\vec{\omega}} f_1(\vec{a}) = 2\omega_x + 2\omega_y = (2,2)\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\end{Bmatrix} = \vec{\nabla} f_1(\vec{a}) \cdot \vec{\omega}$$

2. $f_2 = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Estudiamos su derivada direccional en $(0,0)$.
$$D_{\vec{\omega}} f_2(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_2(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) - f_2(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda^3 \omega_x^2 \omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)} - 0 \right) \frac{1}{\lambda} = \omega_x^2 \omega_y$$
de donde obtenemos las derivadas parciales
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = D_{(1,0)} f_2(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = D_{(0,1)} f_2(0,0) = 0$$
y vemos que f_2 no es diferenciable en $(0,0)$, ya que no se cumple la condición necesaria:
$$D_{\vec{\omega}} f_2(0,0) = \omega_x^2\, \omega_y \neq (0,0)\begin{Bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\end{Bmatrix} = \vec{\nabla} f_2(0,0) \cdot \vec{\omega}$$

3. $f_3 = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Estudiamos su derivada direccional en $(0,0)$
$$D_{\vec{\omega}} f_3(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_3(\lambda\omega_x, \lambda\omega_y) - f_3(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{\lambda^2 \omega_x \omega_y}{\lambda^2(\omega_x^2+\omega_y^2)} - 0 \right) \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega_x \omega_y}{\lambda}$$
límite que no existe en general (salvo si uno de los factores ω_x, ω_y es nulo).

   Obtenemos entonces las derivadas parciales en $(0,0)$, usando los unitarios $(1,0)$ y $(0,1)$:
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_3(h,0) - f_3(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h\,0}{h^2+0} - 0 \right) \frac{1}{h} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = \cdots = 0$$
Entonces f_3 tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero se puede comprobar que no tiene límite en $(0,0)$, por lo que no es continua.

Hemos visto, pues, **tres modos de obtener las derivadas parciales**: 1) derivando la expresión de la función, 2) como caso particular de las derivadas direccionales y 3) directamente, a partir de los vectores unitarios de los ejes.

Ejercicio. Aplica lo visto en el ejemplo anterior a
$$f_1 = x^2+y^3; \quad f_2 = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad f_3 = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d. Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad

Los teoremas anteriores nos sirven para reconocer funciones diferenciables (apdo. **a**) o bien para descartar que lo sean (apdos. **b** y **c**). Pero existen funciones continuas que no cumplen la condición suficiente de diferenciabilidad y sí la necesaria, por lo que necesitamos alguna otra condición. Para ello vamos a simplificar la expresión utilizada en la definición de función diferenciable, escribiéndola en forma de límite.

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\vec{a} \in \overset{\circ}{D}$. Decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si se cumple:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = [\vec{g} + \vec{\varepsilon}] \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

Efectuamos el producto escalar del segundo miembro, recordando que el producto de $\vec{g}$ (derivada de f) por el incremento de la variable es la diferencial de f. Y que el producto de $\vec{\varepsilon}$ por $(\vec{x} - \vec{a})$ es un infinitésimo de orden superior a $(\vec{x} - \vec{a})$. Entonces,

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \vec{g} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = df(\vec{a}) + o(\vec{x} - \vec{a})$$

de donde

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df(\vec{a}) = o(\vec{x} - \vec{a})$$

Al ser el término de la izquierda un $o(\vec{x} - \vec{a})$, se debe cumplir

$$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - df(\vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0}$$

Función de dos variables. En este caso usamos la siguiente notación (f'_x, f'_y se entienden particularizadas en $\vec{a}$):

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix};\ \vec{a} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix};\ \vec{x} - \vec{a} = \begin{Bmatrix} x - a \\ y - b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h \\ k \end{Bmatrix};\ \vec{g} = \begin{Bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{Bmatrix};\ \vec{df}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ k \end{Bmatrix}$$

Y la condición (necesaria y suficiente) de diferenciabilidad de f en $\vec{a}$ resulta:

$$\boxed{\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf'_x - kf'_y}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0}$$

Ejemplo. Estudiamos la diferenciabilidad en $(0,0)$ de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calculamos las derivadas parciales en el origen:

$$f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h^4 - 0}{h^2 + 0} - 0 \right) \frac{1}{h} = 0;\quad f'_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \cdots = 0$$

Al ser nulas f, f'_x y f'_y en $(0,0)$, la condición toma la forma: $\displaystyle\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^4 - k^4}{\left(h^2 + k^2\right)^{3/2}} = 0$, que resolvemos usando coordenadas polares (apdo. **d**):

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^4 \left(\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta\right)}{\left[\rho^2 \left(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta\right)\right]^{3/2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^4}{\rho^3} \left(\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta\right) = 0$$

con lo que f es diferenciable en el origen.

5. Funciones vectoriales de variable vectorial

Veremos a continuación las definiciones de límite, continuidad y diferenciabilidad en el caso general de funciones vectoriales de variable vectorial. Ello nos permitirá definir en **6.1** la función compuesta y analizar su continuidad y diferenciabilidad. A continuación volveremos a las funciones reales de variable vectorial para estudiar las derivadas sucesivas, el desarrollo de Taylor y el cálculo de extremos.

Sea $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad a \in D' \cap D$. Como ya se dijo en la introducción al tema, la variable $\vec{x}$ y la función $\vec{f}(\vec{x})$ toman la forma

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}; \qquad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1 \dots x_n) \end{Bmatrix}$$

5.1. Límite

De lo visto en el apdo. **3.1**, se deduce que en este tipo de funciones existe límite si y sólo si existe para cada una de las componentes, en cuyo caso

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_m(\vec{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_m(x_1 \dots x_n) \end{Bmatrix}$$

5.2. Continuidad

Teniendo en cuenta lo anterior, la condición de continuidad en el punto $\vec{a}$, en forma de límite, se expresa

$$\vec{f} \text{ es continua en } \vec{a} \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_j(\vec{x}) = f_j(\vec{a}),\ j = 1, \dots m$$

Luego $\vec{f}$ es continua en $\vec{a}$ si y sólo si lo son cada una de sus m componentes.

5.3. Diferenciabilidad

Como en el caso del límite, a partir del apdo. **3.3** concluimos que estas funciones son diferenciables si y sólo si cada componente cumple la condición de diferenciabilidad, es decir

$$\vec{f} \text{ es diferenciable en } \vec{a} \iff f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{a}) = \left[\frac{df_j}{d\vec{x}} + \vec{\varepsilon}_j(\vec{x}-\vec{a})\right] \cdot (\vec{x}-\vec{a}),\ j = 1, \dots m$$

Agrupando las m condiciones, obtenemos la condición de diferenciabilidad en $\vec{a}$ para funciones vectoriales de variable vectorial:

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) = \Big[G_{m\times n} + \vec{\varepsilon}_{m\times n}(\vec{x}-\vec{a})\Big]\,(\vec{x}-\vec{a})$$

donde

$$G_{m\times n} = \begin{Bmatrix} \dfrac{df_1}{d\vec{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{df_m}{d\vec{x}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana, cuyas filas son las derivadas totales de las componentes de $\vec{f}$. La matriz $\vec{\varepsilon}_{m\times n}(\vec{x}-\vec{a})$ tiende a la matriz nula cuando $\vec{x} \to \vec{a}$.

Si $\vec{f}$ es diferenciable, su diferencial se obtiene multiplicando la matriz jacobiana por el vector $d\vec{x}$, resultando

$$d\vec{f} = \begin{Bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + & \cdots & + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + & \cdots & + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \end{Bmatrix}$$

Si las n derivadas parciales de cada componente f_j de $\vec{f}$ son continuas, f_j será diferenciable, de modo que una condición suficiente de diferenciabilidad para $\vec{f}$ es que sus $m \times n$ derivadas parciales sean continuas.

Ejemplo. Sea la función $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de componentes

$$u = f_1(x, y, z) = x^2 + xy + 1; \quad v = f_2(x, y, z) = x + y^2; \quad w = f_3(x, y, z) = y + z^2$$

Hallamos la matriz jacobiana en $P(1, 1, 1)$. Utilizando notación simplificada,

$$J = \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{pmatrix} \overset{P}{=} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como las nueve derivadas parciales son continuas, $\vec{f}$ es diferenciable. Su diferencial vale

$$d\vec{f}_P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3dx + dy \\ dx + 2dy \\ dy + 2dz \end{Bmatrix}$$

6. Composición de funciones

6.1. Función compuesta. Continuidad y diferenciabilidad

Dados los conjuntos $\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_y}, \mathbb{R}^{n_z}$, se consideran las funciones $\vec{f} : D_x \to \mathbb{R}^{n_y}$ y $\vec{g} : D_y \to \mathbb{R}^{n_z}$, siendo $D_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$ y $D_y \subset \mathbb{R}^{n_y}$ sus dominios.
Si $f(D_x) \subset D_y$, definimos la función compuesta $\left(\vec{g} \circ \vec{f}\right)(\vec{x}) = \vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) = \vec{\phi}(\vec{x})$. Se verifica:

a) "*Si $\vec{f}$ es continua en $\vec{a} \in D_x$ y $\vec{g}$ lo es en $\vec{y} = \vec{f}(\vec{a}) \in D_y$, la función compuesta $\vec{g} \circ \vec{f}$ es continua en $\vec{x} = \vec{a}$*".

b) "*Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{a} \in D_x$ y $\vec{g}$ lo es en $\vec{y} = \vec{f}(\vec{a}) \in D_y$, la función compuesta $\vec{g} \circ \vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x} = \vec{a}$*".

Demostración de la diferenciabilidad. Partimos de las condiciones de diferenciabilidad de $\vec{f}$ y $\vec{g}$ en $\vec{x} = \vec{a}$ e $\vec{y} = \vec{b}$ respectivamente (con la notación $\underset{\sim}{M}$ simbolizamos la matriz M):

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) = \left[\left. \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_x}(\vec{x} - \vec{a}) \right] (\vec{x} - \vec{a}), \quad \text{siendo } \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \underset{\sim}{\mathcal{E}_x} = \underset{\sim}{\Omega} \qquad (1)$$

$$\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{b}) = \left[\left. \frac{d\vec{g}}{d\vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{b}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_y}(\vec{y} - \vec{b}) \right] (\vec{y} - \vec{b}), \quad \text{siendo } \lim_{\vec{y}\to\vec{b}} \underset{\sim}{\mathcal{E}_y} = \underset{\sim}{\Omega} \qquad (2)$$

Haciendo $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ en la condición (2), obtenemos

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{a})) = \left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_y}\left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\right) \right] \left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\right)$$

Sustituímos el factor $\left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\right)$ por su valor en (1) y operamos. Resulta un producto de corchetes, en los que omitimos las dependencias de $\varepsilon_{\vec{x}}$ y $\varepsilon_{\vec{y}}$:

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) - \vec{g}(\vec{f}(\vec{a})) = \left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_y} \right] \left[\left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_x} \right] (\vec{x} - \vec{a}) =$$

$$\left[\left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}} \left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}} \underset{\sim}{\mathcal{E}_x} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_y} \left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}_y}\, \underset{\sim}{\mathcal{E}_x} \right] (\vec{x} - \vec{a})$$

Cuando $\vec{x} \to \vec{a}$, $\vec{f}(\vec{x}) \to \vec{f}(\vec{a})$ por continuidad. Entonces los sumandos 2º, 3º y 4º del corchete tienden a la matriz nula, por lo que son expresiones del tipo $\underset{\sim}{\mathcal{E}}(\vec{x} - \vec{a})$.

El primer sumando, por su parte, representa la derivada de la función compuesta, formada por el producto de las derivadas (jacobianos) de $\vec{g}$ con respecto a $\vec{y}$ y de $\vec{f}$ con respecto a $\vec{x}$. Si $\vec{g} \circ \vec{f} = \vec{\phi}$, resulta la condición de diferenciabilidad de $\vec{\phi}$

$$\vec{\phi}(\vec{x}) - \vec{\phi}(\vec{a}) = \left[\left.\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} + \underset{\sim}{\mathcal{E}}(\vec{x} - \vec{a}) \right] (\vec{x} - \vec{a}),$$

siendo la derivada de la función compuesta, en $\vec{x} = \vec{a}$,

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \left.\frac{d\vec{g}}{d\vec{y}}\right|_{\vec{y}=\vec{f}\vec{a}} \left.\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}}$$

Si lo anterior se cumple $\forall \vec{x} \in D_x$, la función compuesta es diferenciable en D_x.

6.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Hemos visto que la derivada de la función compuesta $\vec{\phi} = \vec{g} \circ \vec{f}$ es una matriz que se obtiene como producto de dos: la derivada de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$ por la derivada de $\vec{f}$ respecto a $\vec{x}$. Es decir, **el jacobiano de la función compuesta es el producto de los jacobianos de las funciones**.

$$\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n_x}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_z}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n_z}}{\partial x_{n_x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n_y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n_z}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n_z}}{\partial y_{n_y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_x}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_{n_x}} \end{pmatrix}$$

Desarrollamos ahora el producto de matrices. Observamos que el elemento (i, k) de la primera matriz (derivada de ϕ_i respecto a x_k) se obtiene multiplicando la i-ésima fila de la segunda por la $k-$ésima columna de la tercera, es decir:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots \frac{\partial g_i}{\partial y_{n_y}}\frac{\partial f_{n_y}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n_y} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

lo que podemos interpretar diciendo que *la derivada de ϕ_i respecto a x_k es la suma de las derivadas obtenidas a través de todas las funciones f_j que relacionan g_i con x_k.*

Ejemplo 1. Sean las funciones $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. A partir de ellas definimos la función compuesta

$$\vec{z} = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{\phi}(\vec{x})$$

Tenemos:

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(x_1, x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix}$$

Las derivadas de las funciones ϕ_1, ϕ_2 respecto a las variables x_1, x_2 serán:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Estas expresiones se simplifican notablemente utilizando el nombre de las variables para representar a las funciones, es decir sustituyendo ϕ_i y g_i por z_i, f_j por y_j. Resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial z_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_2} \\
\frac{\partial z_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1} \\
\frac{\partial z_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial z_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial z_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Conviene recordar que quienes dependen de las variables son las funciones: la función g_i, de y_j; y las funciones ϕ_i, f_j, de x_k. Y que una variable puede depender de otra según distintas funciones, que debemos especificar. Por ello, esta notación es más sencilla a costa de perder rigor.

Ejemplo 2. Sea la función $z = f(x, y) = x^2 - 3y$, siendo $x = u - v$; $\quad y = 2u + v^2$.

Hallamos las derivadas de z respecto a u y v.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cdot 1 + (-3)\, 2 = 2(u - v) - 6 = 2u - 2v - 6 \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2x\,(-1) + (-3)\, 2v = -2(u - v) - 6v = -2u - 4v
\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que obtenemos el mismo resultado escribiendo z como función de u y v

$$z = \phi(u, v) = x^2 - 3y\Big|_{y=2u+v^2}^{x=u-v} = u^2 - 2v^2 - 2uv - 6u$$

y hallando directamente sus derivadas parciales.

Nota. Un ejemplo de aplicación de la regla de la cadena es el cálculo la derivada de la función inversa. Puede verse en el documento "Obtención del jacobiano de la función inversa".

Ejercicio. Haz las mismas operaciones del ejemplo 2, siendo $z = xy + y^3$; $x = 2u + 1$; $y = u^2 - v$.

Caso particular. Es frecuente que una función dependa de varias variables y que una de ellas sea a su vez función de alguna de las otras. Por ejemplo:

$$z = g(x, v), \text{ siendo } v = f(x, y)$$

donde z depende de x directamente (a través de g) y también indirectamente (a través de f). Para obtener en este caso la derivada respecto a x de la función compuesta hacemos lo siguiente:

$$z = g(x, v)|_{v=f(x,y)} = \phi(x, y) \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Es decir, derivamos respecto a x los términos que dependen directamente de esa variable y tenemos en cuenta la función "intermedia" f para los que lo hacen a través de v.

Ejemplo. Sea $z = x^2 + v^3$, siendo $v = \operatorname{sen}(4x + y^2)$. Entonces

$$z = \phi(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}^3(4x + y^2) \Longrightarrow \phi'_x = 2x + 3\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)\,4$$

La derivada respecto a y resulta

$$\phi'_y = 3\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)\,2y = 6y\operatorname{sen}^2(4x + y^2)\cos(4x + y^2)$$

Ejercicio 1. Deriva respecto de x y de y la función $z = \operatorname{tg} x + v^2$, siendo $v = \cos(x + 2y)$.
Solución. $\phi'_x = 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}(2x + 4y)$; $\phi'_y = -2\operatorname{sen}(2x + 4y)$.

Ejercicio 2. Deriva respecto de x y de y la función $z = x\,e^v$, siendo $v = xy^2$.
Solución. $\phi'_x = e^{xy^2} + xy^2\,e^{xy^2}$; $\phi'_y = 2x^2y\,e^{xy^2}$.

7. Derivadas de orden superior

7.1. Definición

Estudiamos a continuación las derivadas sucesivas en funciones reales de variable vectorial.
Sea una función real de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, definida en un entorno del punto $\vec{a}$.

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad \vec{a} \in U_{\vec{a}} \subset D$$

Si f admite derivada respecto de x_i en $U_{\vec{a}}$, en ese entorno existirá la función derivada parcial de f respecto de x_i, que denotamos $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ o bien f'_{x_i}.
Si esta función derivada parcial es derivable respecto de la variable x_j en el punto $\vec{a}$, en ese punto existirá la derivada parcial segunda respecto de x_i y de x_j de la función f, es decir

$$\exists\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{a}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\Big|_{\vec{x}=\vec{a}}$$

Y si esta derivada parcial segunda existe para todo $\vec{x}$ del dominio, hemos obtenido la función derivada parcial segunda de f respecto de x_i y de x_j

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = f''_{x_i x_j}$$

Reiterando este proceso, podemos obtener las derivadas parciales de f, de cualquier orden.
En el caso de dos variables existen las cuatro derivadas segundas siguientes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

7.2. Derivadas cruzadas

En funciones de varias variables podemos respecto a las mismas variables en distinto orden. Un caso particular en funciones de dos variables son las derivadas segundas cruzadas, es decir las derivadas segundas respecto de x y de y, en los dos órdenes posibles (f''_{xy} y f''_{yx}).

En las funciones derivables que manejamos habitualmente, observamos que el orden de derivación parece no influir. Por ejemplo:

$$f(x,y) = x^2y^5 \Longrightarrow f''_{x\,y} = f''_{y\,x} = 10xy^4$$

y lo mismo ocurre con $g(x,y) = e^{xy^2}$ o $h(x,y) = x \operatorname{sen} y^2$.
Sin embargo, si consideramos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

observamos que, fuera del origen, se cumple (compruébese)

$$f''_{x\,y} = f''_{y\,x} = \frac{y^6 + 6y^4x^2 - 3y^2x^4}{(x^2+y^2)^3}$$

pero $f''_{x\,y}(0,0) = 1,\; f''_{y\,x}(0,0) = 0$. Luego las derivadas cruzadas no siempre coinciden.

Nota. Las derivadas segundas del caso anterior se han obtenido de la siguiente manera:

1. Calculamos f'_x y f'_y fuera del origen, derivando. Y sus valores en $(0,0)$, por la definición.
2. Obtenemos las derivadas segundas en el origen por la definición, a partir de lo obtenido en el apartado anterior:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(0,0)} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

Los teoremas siguientes establecen condiciones suficientes para que esto ocurra.

Teorema. *Sea f, definida en $U_{\vec{a}} \subset \mathbb{R}^n$. Si las derivadas parciales de orden k en $\vec{a}$ son continuas, su valor no depende del orden de derivación.* Por ejemplo, si $n = 2$ y $f \in C^3$, se cumplirá

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

Nota. Si las derivadas parciales k-ésimas de f son continuas, se dice que $f \in C^k$.

Teorema de Schwarz. *Sea f definida en $U_{\vec{a}} \subset \mathbb{R}^2$. Si en $U_{\vec{a}}$ existen las derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

y la derivada segunda es continua en $\vec{a}$, entonces existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $\vec{a}$ y se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a})$$

Obsérvese que el teorema de Schwarz no es un simple caso particular del anterior para $n = 2$, sino que exige menos condiciones.

7.3. Diferenciales sucesivas

Sabemos que la diferencial es una función lineal que aproxima muy exactamente Δf a partir del valor de f en $\vec{a}$, si estamos suficientemente cerca del punto. Como vimos en **4.4**, la diferencial de f se obtiene como combinación lineal de las diferenciales de las variables, siendo los coeficientes las correspondientes derivadas parciales:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Si cambiamos de punto, df varía, pues -en general- las derivadas parciales de f dependen del punto considerado. Eso significa que podemos considerar a df una función y calcular su diferencial, es decir la diferencial segunda de f:

$$d(df) = d^2 f$$

Repitiendo el proceso podemos obtener las diferenciales sucesivas. Esto nos servirá para aproximar mejor el incremento de una función en las proximidades de un punto, así como para simplificar algunas expresiones, por ejemplo en el desarrollo de una función en serie de Taylor.

Diferencial de orden p de una función de 2 variables. Sea $f(x,y)$, diferenciable. Su diferencial es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si df es diferenciable, obtenemos su diferencial multiplicando las derivadas parciales de df por las respectivas diferenciales de las variables:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy$$

Agrupando los términos que contienen los productos de las diferenciales de x e y, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

y, si las derivadas cruzadas coinciden, resulta

$$\boxed{d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}$$

Esta expresión, que recuerda al desarrollo del cuadrado de una suma, se puede abreviar utilizando el cuadrado **simbólico**

$$d^2 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(2}$$

Se demuestra por inducción que esta notación es válida para una diferencial de cualquier orden, luego podemos escribir

$$\boxed{d^p f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(p}}$$

Ejemplo. La diferencial tercera de una función de 2 variables vale:

$$d^3 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right]^{(3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

donde hemos utilizado, para desarrollarla, los coeficientes del binomio de Newton.

Diferencial de orden p de una función de n variables. Se demuestra también que la notación simbólica para las diferenciales de orden superior es válida para cualquier número de variables. Así pues, la diferencial de orden p de una función de n variables se puede expresar como

$$d^p f(x_1, x_2, \dots x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right]^{(p}$$

Matriz hessiana. Hemos visto en el ejemplo un caso particular de la diferencial (2 variables, diferencial de orden 3). Haciendo $n = 3$, $p = 2$, obtenemos la diferencial segunda de una función de tres variables

$$d^2 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right]^{(2}$$

cuyo desarrollo, suponiendo derivadas cruzadas iguales, es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz$$

que se puede escribir en forma matricial

$$d^2 f = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Esta matriz se denomina matriz hessiana. Será simétrica si las derivadas cruzadas son iguales.

Ejercicio 1. Escribe la diferencial cuarta de una función de 2 variables $f(x, y)$.

Ejercicio 2. Calcula la diferencial segunda de la función de 2 variables $f(x, y) = x^2y + xy^2$, particularizando en los puntos $P(1, -1)$, $Q(1, 0)$.
Solución. $d^2 f|_P = -2dx^2 + 2dy^2$; $d^2 f|_Q = 2dy^2 + 4dxdy$

8. Desarrollo de Taylor

Dada una función de n variables, buscamos su valor en un punto $\vec{x}$, a partir de los valores –en el punto $\vec{a}$– de f y sus sucesivas derivadas. Como hicimos en funciones de una variable, podemos aproximar este valor por medio del polinomio de Taylor de grado k o bien expresarlo exactamente como suma del polinomio de Taylor de grado k más el término complementario de orden k (desarrollo limitado de orden k de la función f).

$$f(\vec{x}) \approx P_k(\vec{x}) \ ; \ f(\vec{x}) = P_k(\vec{x}) + T_k(\vec{x})$$

8.1. Expresión general

Veremos en primer lugar (sin demostración) el caso de dos variables, lo que nos servirá para obtener una expresión simplificada de los sumandos de orden k y del término complementario. Luego generalizaremos al caso de n variables.

Función de 2 variables. Sea la función f, definida en $D \subset \mathbb{R}^2$. Los puntos (a,b) y (x,y) son interiores de D y suponemos que $f \in C^{k+1}$, por lo que es $k+1$ veces diferenciable $(k \geq 1)$).

Para obtener el desarrollo de Taylor, se suman las derivadas de orden creciente, multiplicadas por los incrementos de las correspondientes variables. Por ejemplo, la derivada tercera respecto de x dos veces y de y se multiplica por $(x-a)^2(y-b)$. Entonces:

- El sumando constante del polinomio (grado 0) es $f(a,b)$ (derivada de orden 0).

- Los de grado 1 son
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]$$

- Las derivadas segundas de f son continuas, luego las derivadas segundas cruzadas son iguales. Los sumandos de grado 2 resultan
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]$$
y los escribimos como cuadrado simbólico de la suma de términos de grado 1 (apdo. **7.3**):
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]^{(2}$$
Observamos que también los sumandos de grados $3, 4, \ldots$ pueden escribirse como las potencias simbólicas tercera, cuarta, etc. de dicha suma.

- El término complementario de orden k toma la forma
$$T_k(x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,\xi_2)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_1,\xi_2)(y-b)\right]^{(k+1}$$
siendo (ξ_1,ξ_2) un punto intermedio entre (a,b) y (x,y), es decir
$$(\xi_1,\xi_2) = (a,b) + \theta(x-a, y-b), \quad 0 < \theta < 1$$

Así pues, si $[\,\cdot\,]$ representa la suma de los términos de primer grado, el **desarrollo limitado de orden k de la función f** es

$$\boxed{f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}[\,\cdot\,] + \frac{1}{2!}[\,\cdot\,]^{(2} + \frac{1}{3!}[\,\cdot\,]^{(3} + \cdots + \frac{1}{k!}[\,\cdot\,]^{(k} + T_k(x,y)}$$

Plano tangente. Análogamente a lo que sucede en una variable con la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x=a$, los términos del desarrollo de grado 0 y 1 representan la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en $P(a,b)$.

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Función de n variables. La expresión del desarrollo es análoga a la de 2 variables, pero $[\,\cdot\,]$ contiene ahora las n derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots x_n$, en $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \frac{1}{1!}[\,\cdot\,] + \frac{1}{2!}[\,\cdot\,]^{(2} + \frac{1}{3!}[\,\cdot\,]^{(3} + \cdots + \frac{1}{k!}[\,\cdot\,]^{(k} + T_k(\vec{x})}$$

siendo
$$[\,\cdot\,] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a})(x_2-a_2) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n-a_n)$$

8.2. Expresión matricial.

En el caso $n = 2$, los términos de grado igual o inferior a 2, escritos en forma matricial son

$$f(a,b) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(a,b)} \begin{Bmatrix} x-a \\ y-b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(a,b)} \begin{Bmatrix} x-a \\ y-b \end{Bmatrix}$$

El segundo sumando es el producto escalar del gradiente de f por el incremento $\{(x,y)-(a,b)\}$ de la variable. El tercer sumando es la matriz hessiana pre y postmultiplicada por el incremento de (x,y). Entonces, para cualquier n, la expresión de los términos del desarrollo de grado menor o igual que 2 es

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x}-\vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{a})^t \underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}} \{\vec{x}-\vec{a}\} + \ldots}$$

donde escribimos $(\vec{x}-\vec{a})^t$ para indicar que premultiplicamos la matriz hessiana por una matriz fila y la postmultiplicamos por una matriz columna $\{\vec{x}-\vec{a}\}$.

Ejemplo. Obtenemos el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto $P(1,-2)$ de la función

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2$$

- Derivadas primeras: $f'_x = 2xy$; $f'_y = x^2 + 3$.
- Derivadas segundas: $f''_{xx} = 2y$; $f''_{yy} = 0$; $f''_{xy} = f''_{yx} = 2x$.
- Derivadas terceras: $f'''_{xxx} = 0$; $f'''_{yyy} = 0$; $f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = 2$; $f'''_{yyx} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy} = 0$.

Observamos que las derivadas cruzadas, tanto de segundo como de tercer orden, son iguales y que todas las derivadas de tercer orden son constantes, por lo que las de orden superior a 3 son nulas.

Particularizamos los valores de las variables en el punto P y escribimos los sumandos de grado menor o igual que 2 en forma matricial. Resulta

$$f(P) + \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-1 & y+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{3f'''_{xxy}(x-1)^2(y+2)}{3!} =$$

$$-10 + \begin{pmatrix} -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{Bmatrix} + \frac{3 \cdot 2\,(x-1)^2(y+2)}{6}$$

Operando, resulta el polinomio de grado 3 en potencias de $(x-1)$ e $(y+2)$

$$P_3(x,y) = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

Si operamos y simplificamos, obtenemos la función inicial. Esto era de esperar pues, al ser la función un polinomio de grado 3, su polinomio de Taylor de grado 3 coincide con f.

Ejercicio. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 de la función f en $P(-1,1)$

$$f(x,y) = xy^2 - x^2$$

Comprueba que, operando la expresión obtenida para el polinomio, resulta la función f.

Solución. $z = -2 + 3(x+1) - 2(y-1) - (x+1)^2 + 2(x+1)(y-1) - (y-1)^2 + (x+1)(y-1)^2$

9. Extremos relativos

Vamos a estudiar los extremos relativos de una función de varias variables. Empezaremos suponiendo que existe un extremo y buscaremos los puntos que cumplan una cierta condición (condición necesaria de extremo). A continuación, analizando los primeros términos del desarrollo de Taylor deduciremos si en los puntos anteriores existe máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas, con lo que tendremos una condición suficiente de existencia de extremo.

9.1. Condición necesaria de extremo

Sea la función f

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad f \in C^k,\, k \geq 2$$

Supongamos que f tiene un mínimo relativo en $\vec{x} = \vec{a}$, siendo $\vec{a}$ un punto interior del dominio (para un máximo razonaríamos igual). Entonces existirá un entorno reducido del punto en el que los valores de f serán mayores que $f(\vec{a})$, es decir

$$\exists\, U^*_{\vec{a}} \,/\, f(\vec{a}) < f(\vec{x}) \;\forall \vec{x} \in U^*_{\vec{a}}$$

(suponemos que el mínimo es estricto, para mínimo en sentido amplio usaríamos $\leq$).

Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tendremos que

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\; \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U^*_{\vec{a}} \subset D$$

lo que significa que f crece al modificar cualquiera de las variables x_i. Entonces, para cada una de ellas existirá un intervalo $U^*_{a_i}$ en el que se cumplirá

$$\begin{array}{c}
f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(x_1, a_2, \ldots, a_n) = \phi_1(x_1),\; \forall x_1 \in U^*_{a_1} \\
f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(a_1, x_2, \ldots, a_n) = \phi_2(x_2),\; \forall x_2 \in U^*_{a_2} \\
\vdots \\
f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < f(a_1, a_2, \ldots, x_n) = \phi_n(x_n),\; \forall x_n \in U^*_{a_n}
\end{array}$$

Es decir, tenemos n funciones de una variable, $f(a_1, a_2, \ldots, x_i, \ldots a_n) = \phi_i(x_i)$, cada una de ellas con un mínimo en un punto interior.

El teorema del extremo relativo (para funciones de una variable) dice que *"si una función derivable en un intervalo I tiene un extremo en un punto a, interior de I, su derivada en a es nula"*. Por lo tanto,

$$\left.\frac{d\phi_1}{dx_1}\right|_{x_1=a_1} = \left.\frac{d\phi_2}{dx_2}\right|_{x_2=a_2} = \cdots = \left.\frac{d\phi_n}{dx_n}\right|_{x_n=a_n} = 0$$

Pero cada una de estas derivadas equivale a la derivada parcial de f respecto a la variable correspondiente, particularizada en $\vec{x} = \vec{a}$, luego

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \cdots = \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0}}$$

que es una **condición necesaria para la existencia de extremo** en el punto $\vec{a}$. Los puntos que verifican esta condición se llaman **puntos críticos**.

Como hemos supuesto que f es diferenciable y $\vec{a}$ un punto interior, hemos de comprobar también los **puntos frontera y aquellos en que f no es diferenciable**, donde podría haber extremo (ver documento de apoyo "Problema de extremos con 2 variables" donde se estudia la frontera).

9.2. Condición suficiente de extremo

Para determinar el tipo de extremo, utilizaremos los tres primeros términos del desarrollo de Taylor en forma matricial. Al ser continuas las derivadas segundas, la matriz hessiana es simétrica.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x} - \vec{a})^t \underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}} (\vec{x} - \vec{a}) + \ldots$$

Si llamamos $d\vec{x}$ al incremento $\vec{x} - \vec{a}$ y pasamos al otro miembro el $f(\vec{a})$, tenemos

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot d\vec{x} + \frac{1}{2}\, d\vec{x}^{\,t} \underset{\sim}{H}|_{\vec{x}=\vec{a}}\, d\vec{x} + \ldots$$

donde observamos que:

- El primer miembro representa el incremento del valor de la función entre $\vec{a}$ y $\vec{x}$.
- El primer sumando del segundo miembro es la diferencial $df(\vec{a})$ de la función.
- El segundo sumando es la diferencial segunda $d^2 f(\vec{a})$, multiplicada por 1/2.
- Los siguientes sumandos son infinitésimos de orden superior: si $\vec{x}$ está muy cerca de $\vec{a}$, son despreciables frente a los anteriores.

Si el punto $\vec{a}$ cumple la condición necesaria de extremo, $\vec{\nabla} f(\vec{a})$ es nulo, por lo que el signo de Δf lo da el primer sumando no nulo, $d^2 f(\vec{a})$ (no da el valor exacto debido a los infinitésimos de orden superior). A continuación analizamos este término.

La diferencial segunda es una forma cuadrática, que asocia un número real a un vector

$$d\vec{x} \to d\vec{x}^{\,t}\, \underset{\sim}{H}\, d\vec{x}$$

Clasificamos una forma cuadrática según el signo que tome $\forall\, d\vec{x} \neq 0$. Así, $d^2 f$ será:

- Definida positiva $\iff d^2 f > 0$.
- Definida negativa $\iff d^2 f < 0$.
- Semidefinida positiva $\iff d^2 f \geq 0$.
- Semidefinida negativa $\iff d^2 f \leq 0$.
- Indefinida $\iff d^2 f \gtrless 0$ (puede ser nula, aunque no es necesario).

Entonces, según el tipo de forma cuadrática que sea $d^2 f$, tendremos:

- Si $d^2 f$ es definida positiva, $\Delta f > 0$ siempre, luego se trata de un mínimo.
- Si $d^2 f$ es definida negativa, $\Delta f < 0$ siempre, luego se trata de un máximo.
- Si $d^2 f$ es indefinida, puede darse $\Delta f \gtrless 0$, luego no hay ni máximo ni mínimo.

Si es semidefinida, tenemos un caso dudoso. Lo analizamos para SDP (con SDN es análogo).

- Si es semidefinida positiva, $d^2 f \geq 0$, por lo que $\Delta f > 0$ para algún $d\vec{x}$; pero, para otros, $d^2 f = 0$, luego el signo de Δf lo dan los términos de orden superior (Δf puede ser $\gtreqless 0$).
- Lo único que podemos asegurar es que no existe máximo. Pues, si $d^2 f \geq 0$, para algún $d\vec{x}$ debe ser $d^2 f > 0 \Longrightarrow \Delta f > 0$, por lo que la función crece. Luego no puede haber máximo.
- En los documentos de apoyo se analiza la función $f(x, y) = x^2 + ky^4$, que tiene un punto crítico en el origen. Se muestra que, según el signo de k, se obtienen distintos resultados.

9.3. Determinación del tipo de forma cuadrática

Veremos dos formas de clasificar una forma cuadrática, a partir de su matriz asociada.

Criterio de Sylvester. Una forma cuadrática es:

- Definida positiva si y sólo si los menores principales de la matriz son positivos.
- Definida negativa si y sólo si los signos de los menores principales son $-, +, -, \ldots$

Diagonalización por congruencia. Toda matriz simétrica H es diagonalizable por congruencia, es decir

$$H = H^t \Longrightarrow \exists\, C \left(|C| \neq 0 \right) / \, CHC^t = D$$

Según los signos de los elementos de la diagonal principal de D, la forma cuadrática será:

- Definida positiva $\Longleftrightarrow$ $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Definida negativa $\Longleftrightarrow$ $d_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Semidefinida positiva $\Longleftrightarrow$ $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Semidefinida negativa $\Longleftrightarrow$ $d_i \leq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- Indefinida $\Longleftrightarrow$ $d_i \gtreqless 0$ (puede haber alguno nulo).

Nota. A partir de dos propiedades de las matrices cuadradas (*"el determinante del producto es igual al producto de los determinantes"* y *"el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta"*), se cumple:

$$|D| = |C|\,|H|\,\left|C^t\right| = |C|^2\,|H|$$

por lo que los determinantes de la matriz hessiana y su matriz diagonal tienen el mismo signo, lo que nos permite utilizar el signo de $|H|$ al clasificar la forma cuadrática.

A continuación se muestran los pasos que conviene dar en el estudio de extremos.

9.4. Cálculo de extremos. Resumen y ejemplos

Sea $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$. Para buscar sus extremos en $\mathring{D}$, interior del dominio, tenemos en cuenta las condiciones necesaria y suficiente.

Condición necesaria. Al ser el conjunto abierto y f diferenciable, sus extremos están en puntos que cumplan la condición de gradiente nulo. Entonces los posibles extremos (puntos críticos) vienen dados por las soluciones de la ecuación

$$\boxed{\vec{\nabla} f = \vec{0}}$$

Condición suficiente. Para saber qué puntos críticos son extremos, el primer paso es determinar de qué tipo es la forma cuadrática $d^2 f$ en ellos. Sabemos que:

- Si es definida, se trata de un mínimo (positiva) o de un máximo (negativa).
- Si es indefinida, no hay máximo ni mínimo (punto de silla).
- Si es semidefinida, solo sabemos que no puede haber máximo (si es SD positiva) o no puede haber mínimo (si es SD negativa).

Así pues, procedemos del siguiente modo:

a) **¿Es H definida?** Se averigua aplicando el **criterio de Sylvester**. Entonces si es definida positiva, existe un **mínimo**. Si es definida negativa, un **máximo**.

b) Si H **no** es **definida**, estudiando su determinante tenemos dos casos:

b.1 $\boxed{|H| \neq 0}$. Como $|D| = |C|^2 \, |H|$, resulta que $|D| = d_1 d_2 \cdots \neq 0$, lo que significa que ningún d_i es nulo, con lo que tendrán signos iguales o distintos. Si tuvieran igual signo, H sería definida, cosa que no ocurre. Entonces han de existir $d_i \gtrless 0$, por lo que H es **indefinida** y tenemos un **punto de silla**.

b.2. $\boxed{|H| = 0}$. Entonces $|D| = 0$ por lo que los d_i pueden ser $\geq 0, \leq 0$ ó $\lesseqgtr 0$ (alguno ha de ser nulo), por lo que H puede ser **semidefinida** o **indefinida**.

En estos casos se puede conocer el tipo diagonalizando por congruencia.

En el caso particular $n = 2$, sólo existen dos d_i, de los que al menos uno es nulo. No puede entonces ser indefinida, por lo que será semidefinida.

c) **Casos dudosos** (H semidefinida): para solucionarlos podemos probar distintas direcciones de alejamiento desde el punto $\vec{a}$. Si en una dirección la función crece pero en otra decrece, se trata de un **punto de silla**. Lo mismo ocurre si, en la misma dirección, crece en un sentido y decrece en el otro. En el caso $n = 2$, podemos movernos desde (a, b) paralelamente a los ejes, a las bisectrices $y = x, \ y = -x$, etc.

Ejemplos.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - 2y$.

Aplicando la condición necesaria, resulta el punto crítico $P(0, 1)$. La matriz hessiana es $H_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, definida positiva (Sylvester), luego se trata de un mínimo.

b) $f(x, y) = xy + x - y - 1$.

Aplicando la condición necesaria, resulta el punto crítico $P(1, -1)$. La matriz hessiana es $H_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En este caso H no es definida (Sylvester). Como $|H| \neq 0$, resulta que H es indefinida, por lo que tenemos un punto de silla.

c) $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(0, y)$ (son críticos todos los puntos del eje Y). En todos ellos, $H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |H| = 0 \Longrightarrow H$ semidefinida $(n = 2) \Longrightarrow$ caso dudoso.

Para solucionarlo consideramos la diferencial segunda $d^2 f = -\dfrac{1}{R}\, dx^2 \leq 0$, que toma valor negativo $\forall\, dx \neq 0$. Luego el valor de f disminuye si nos movemos, desde los puntos $(0, y)$ en cualquier dirección, salvo la dada por $dx = 0$. Pero esto significa movernos por el eje Y, donde el valor de la función es constante y vale R. Es decir, en todo punto $(0, y)$ –eje Y– existe un máximo en sentido amplio, de valor $z = R$.

Lo vemos gráficamente escribiendo la ecuación en la forma $z^2 + x^2 = R^2$, que corresponde a un cilindro de radio R y eje horizontal (el eje OY). La expresión del enunciado corresponde a la parte del cilindro sobre el plano XY $(z \geq 0)$.

d) $f(x, y) = y^3 - x^2 - 2x - 1$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(-1, 0)$. $H_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz H, diagonal, es semidefinida negativa (caso dudoso).

Para resolverlo estudiamos –como en el apdo. anterior– la diferencial segunda $d^2f = -2dx^2$. Esto nos indica que el valor de f disminuye al movernos en cualquier dirección, salvo la del eje Y. Estudiando este caso (variación sólo de la y), comprobamos que f crece si y crece y decrece si y decrece, por lo que en P hay un punto de silla.

Otra opción es movernos en distintas direcciones a partir de $P(-1,0)$, donde f es nula: por ejemplo en las de los ejes, incrementando alternativamente x e y en un valor Δ. Resulta:

d.1. En cualquier punto de coordenadas $(-1+\Delta, 0)$, la función toma el valor $-\Delta^2$, luego decrece, a partir de su valor en P, independientemente del signo de Δ.

d.2. En cualquier punto de coordenadas $(-1, \Delta)$, la función vale Δ^3. Es decir, crece si nos movemos desde P en el sentido positivo del eje Y ($\Delta > 0$) y decrece en caso contrario.

Concluimos que, en $P(-1,0)$, f no tiene máximo ni mínimo (punto de silla).

e) $f(x,y,z) = 3x^2 - 6x + y^4 - z^4$.

Aplicando la C.N. $\Longrightarrow P(1,0,0)$. $H_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

H es semidefinida positiva (caso dudoso) y la diferencial segunda vale $d^2f = 6dx^2$, por lo que la función crecerá siempre que $dx \neq 0$. Si en cambio nos movemos a partir de P, paralelamente al plano YZ ($dx = 0$), la diferencial segunda vale 0. Para identificar el tipo de extremo, nos movemos paralelamente a dicho plano a partir de P, modificando el valor de una de las variables y, z cada vez:

e.1. Valor de f en P: $f(1,0,0) = -3$.

e.2. Incrementamos y: $f(1,\Delta,0) = -3 + \Delta^4 \Longrightarrow \Delta f = \Delta^4$, luego f crece.

e.3. Incrementamos z: $f(1,0,\Delta) = -3 - \Delta^4 \Longrightarrow \Delta f = -\Delta^4$, luego f decrece.

Se trata, entonces, de un punto de silla. No hemos probado a modificar el valor de la x, pues, como se ha dicho, la función crecerá siempre que $dx \neq 0$ (compruébese).

10. Función implícita

A partir de una ecuación que relacione dos variables, $F(x,y) = 0$, en ocasiones podemos despejar una de ellas en función de la otra. Por ejemplo

$$x^3y - \operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3},\ \forall x \neq 0$$

En otros casos no es posible obtener una expresión explícita de y en función de x. Por ejemplo:

$$x \operatorname{sen} y - y - x^2 = 0 \Longrightarrow\ ?$$

Sin embargo, puede ocurrir que, para cada x, haya un único y que verifique la ecuación. Eso implicaría que y es función de x, aunque no exista una expresión explícita que las relacione. En este caso decimos que y es función implícita de x.
A continuación daremos una definición de función implícita y enunciaremos el teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables. Luego generalizaremos al caso de n variables.

10.1. Definición

Decimos que $F(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si y sólo si, para todo $x \in I$, existe un único valor $\psi(x)$ que verifica la ecuación, es decir:

$$\boxed{\forall x \in I\ \exists\, \psi(x) \in \mathbb{R} \,/\, F\big(x, \psi(x)\big) = 0}$$

10.2. Teorema de existencia y diferenciabilidad para dos variables

Lo enunciamos en dos partes:

a) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, abierto. Sea $F(x,y)$ una función continua en A, tal que su derivada respecto de y también lo es. Sea $P(a,b) \in A$ un punto en el que se anula la función y no la derivada.

$$F(x,y),\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \text{continuas en } A; \quad \exists (a,b) \big/ F(a,b)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

En este caso la ecuación $F(x,y)=0$ define como función implícita de x a una **única** función continua $y=\psi(x)$, en un entorno de $x=a, y=b$ (U_a).

b) Si, además, la derivada de F respecto de x es continua en A, entonces $y=\psi(x)$ es diferenciable en U_a y -aplicando la regla de la cadena- se cumple

$$F\big(x,\psi(x)\big)=\phi(x)=0 \Longrightarrow \frac{d\phi}{dx}=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{y=\psi(x)}+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d\psi}{dx}\right|_{y=\psi(x)}=0 \qquad (*)$$

de donde

$$\boxed{\frac{d\psi}{dx}=-\left.\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\right|_{y=\psi(x)}}$$

Es decir, aunque no exista la expresión explícita de $y=\psi(x)$, podemos conocer su derivada en un cierto U_a, y en particular en $x=a$. Esto permite, por ejemplo, obtener la tangente a la curva definida por $F(x,y)=0$, sin conocer la ecuación $y=\psi(x)$ de dicha curva.

Ejemplo. Sea $F(x,y)=x^2+y^2-2=0$. Sus derivadas parciales son $F'_x=2x, F'_y=2y$. Haciendo $y=x$ en la ecuación, obtenemos el punto $P\,(1,1)$ en el que se anula F y no F'_y. Entonces existe un entorno de $x=1$, $y=1$, donde

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{x}{y} \quad \left(\text{en particular } \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_P=-1\right)$$

Obsérvese que $F(x,y)=0$ es la ecuación de una circunferencia, de la que obtenemos dos posibles funciones $y=\psi(x)$, correspondientes a las semicircunferencias por encima y por debajo de OX. Vemos también que todos los puntos de la circunferencia valen como punto P, excepto $P_1(1,0)$ y $P_2(-1,0)$, en los que $F'_y=0$. El motivo es que en todo entorno de esos puntos existen **dos** funciones implícitas (las semicircunferencias mencionadas). Luego no cumplen las condiciones del teorema, que garantiza la existencia de una única función implícita en un cierto entorno.

Nota. La derivada de ϕ en $(*)$ es nula porque la función $\phi(x)$ es **constante** $(\phi=k=0)$ en un cierto entorno de $x=a$. En el ejemplo anterior, la función $z=F(x,y)$ representa un paraboloide. La condición $F=0$ es la ecuación de la curva intersección del paraboloide con el plano XY, es decir, un conjunto de puntos $(x,\psi(x))$ en los que $F=0$. Por tanto, en el entorno U_a considerado, la variación de $F\big(x,\psi(x)\big)=\phi(x)$ respecto a x es nula.

Ejercicio 1. Dada la ecuación $F(x,y)=y^2\cos x - x^2\cos y=0$, se pide:

a) Comprobar que existe f. implícita en un entorno de $P(\pi/2,\pi/2)$ y hallar $\partial\psi/\partial x$ en P.

b) Identificar la función, que en este caso tiene una forma explícita muy sencilla.

c) En $Q(0,0)$ no se cumple $F'_y \neq 0$. ¿Por qué?

Ejercicio 2. Aplica el teorema a $F(x,y)=\operatorname{sen} y+\sec y - x=0$, hallando el punto $P(a,b)$.

10.3. Generalización del teorema a funciones vectoriales

Acabamos de estudiar una ecuación con dos variables que define a una de ellas como función implícita de la otra, $y = \psi(x)$. Vamos a enunciar el teorema en el caso general: ecuación con $m+n$ variables que define a m de ellas como función (vectorial) implícita de las n variables restantes (variable vectorial). Antes veremos, como introducción, un caso con 3 variables.

Caso particular. Sea la ecuación $g(u,v,y) = 0$. Análogamente a lo definido en **10.1** -y prescindiendo de dominios de existencia para simplificar- podemos decir que $g(u,v,y) = 0$ define a y como función implícita de u, v si y sólo si

$$\forall(u,v)\,\exists\psi(u,v)\,/\,g\big(u,v,\psi(u,v)\big) = \phi(u,v) = 0$$

Si se cumplen las condiciones suficientes para ello, $\psi(u,v)$ será diferenciable y -calculando las derivadas parciales de ϕ y despejando- resulta

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{\partial g/\partial u}{\partial g/\partial y}}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{\partial g/\partial v}{\partial g/\partial y}}$$

siempre que la derivada parcial de g respecto de y no se anule.

Caso general. Consideramos ahora una función de m componentes $(g_1, g_2, \ldots g_m)$ y $m+n$ variables $(x_1, \ldots x_n, y_1 \ldots y_m)$, que podemos expresar abreviadamente como $\vec{g}(\vec{x},\vec{y})$.
Las condiciones que exigimos a $\vec{g}$ son análogas a las exigidas en el caso de la función de dos variables $F(x,y)$:

- $\vec{g}$ continua, es decir componentes g_k continuas en $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^{n+m},\ k = 1, \ldots m$.
- Derivadas parciales $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_i}, \dfrac{\partial g_k}{\partial y_j}$ continuas en $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $i = 1, \ldots n;\ j,k = 1, \ldots m$.
- Existe un punto $(a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m) = (\vec{a},\vec{b})\,/\,\vec{g}(\vec{a},\vec{b}) = \vec{0},\ \left|\dfrac{\partial\vec{g}}{\partial\vec{y}}\right|_{(\vec{a},\vec{b})} \neq 0$.

Teorema: en las condiciones enunciadas, "*la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$ define como función implícita de $\vec{x}$ a una única función $\vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$, en un entorno de $\vec{x} = \vec{a},\ \vec{y} = \vec{b}$ $(U_{\vec{a}})$, diferenciable en $U_{\vec{a}}$*".
Esto significa que:

a) La función implícita $\vec{\psi}$ verifica la ecuación $\vec{g} = \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{g}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \exists\,\vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})\,/\,\vec{g}\left(\vec{x},\vec{\psi}(\vec{x})\right) = \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}}$$

La expresión anterior, desarrollada, significa que existen m funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, todas ellas de n variables $(x_1, \ldots x_n)$, tales que satisfacen las m ecuaciones $g_i = 0$. Esto da lugar a m funciones ϕ_i, de las mismas n variables cada una, que se anulan en $U_{\vec{a}}$. Es decir

$$\begin{gathered} g_1(x_1, \ldots x_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = \phi_1(x_1, \ldots x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \ldots x_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = \phi_2(x_1, \ldots x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots x_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = \phi_m(x_1, \ldots x_n) = 0 \end{gathered}$$

b) Para calcular las derivadas de las funciones ϕ_k respecto las distintas variables usamos la regla de la cadena. La derivada de ϕ_k respecto a x_i será

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_k}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = 0$$

Tomando k como índice de fila e i de columna, vemos que $\partial\phi_k/\partial x_i$ representa el elemento (k, i) de la matriz de las derivadas parciales de $\vec{\phi}$ respecto a $\vec{x}$. De la misma forma, $\partial g_k/\partial x_i$ representa el elemento (k, i) de la matriz de las derivadas parciales de $\vec{g}$ respecto a $\vec{x}$.

Por otro lado, la suma entre 1 y m del segundo miembro representa el producto de la fila k de la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$, por la columna i de la matriz de las derivadas de $\vec{\psi}$ respecto a $\vec{x}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir la expresión en forma matricial y despejar, obteniendo

$$\boxed{\frac{d\vec{\phi}}{d\vec{x}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = \Omega_{m\times n}} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = -\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1} \left.\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}\right|_{\vec{y}=\vec{\psi}(\vec{x})}}$$

lo que nos permite calcular la matriz de las derivadas de la función implícita $\vec{\psi}$ respecto a la variable $\vec{x}$. En estas expresiones, todas las matrices son de dimensión $m \times n$, excepto la derivada de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$, que es cuadrada $(m \times m)$.

Como regla mnemotécnica, obsérvese que la expresión vectorial resultante corresponde exactamente con la que obtuvimos en 2 variables, usando vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{\psi}$ en lugar de escalares y cambiando la F por $\vec{g}$

Ejemplo. Vamos a aplicar las expresiones que hemos obtenido al caso particular que resolvimos como introducción.

Expresamos la ecuación $g(u, v, y) = 0$, como $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$, siendo

$$\vec{x} = (u, v); \quad \vec{y} = y; \quad \vec{g} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m \quad \text{con } n = 2,\ m = 1$$

La condición $\vec{g} = \vec{0}$ define la función implícita $\vec{\psi}$

$$\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$$

donde $\vec{g}, \vec{y}, \vec{\psi}$ son escalares en este caso.

Aplicando la expresión general a nuestro caso, la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{y}$ tiene un único elemento y su inversa es $(\partial g/\partial y)^{-1}$. Y la matriz de las derivadas de $\vec{g}$ respecto a $\vec{x}$ contiene las derivadas de g respecto de u y v. Entonces la derivada de la función implícita $\vec{\psi}$ respecto de $\vec{x}$ es

$$\frac{d\vec{\psi}}{d\vec{x}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\partial g/\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) = -\left(\frac{\partial g/\partial u}{\partial g/\partial y}, \frac{\partial g/\partial v}{\partial g/\partial y}\right)$$

y las expresiones de las derivadas de ψ respecto de u y v coinciden con las obtenidas al principio.

Lo anterior sugiere que con frecuencia la notación vectorial no es necesaria y se puede proceder como hicimos en el caso particular.

Se recomienda ver los problemas resueltos en el documento de apoyo “Teorema de la función implícita. Ejemplos”.

11. Extremos condicionados

En el apartado **9** hemos hallado extremos de funciones vectoriales cuyas variables pueden moverse libremente por sus respectivos dominios. A continuación estudiaremos extremos de funciones en el caso de que existan **condiciones de ligadura** entre las distintas variables.

Imaginemos una función de dos variables con un extremo en el punto $P(a, b)$. Si le imponemos una condición que relacione x e y, puede dejar de haber extremo en P y aparecer otro en P'.

Ejemplo. La función $f(x, y) = 1-x^2-y^2$ alcanza su valor máximo para $x = y = 0$. Si obligamos a las variables a cumplir la condición $x + y - 1 = 0$, el máximo se alcanza para $x = y = 1/2$.

11.1. Condiciones en forma explícita

Consideramos funciones de $m+n$ variables, ligadas por m condiciones explícitas tales que m variables dependen explícitamente de las otras n. Es decir, sea la función

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m)$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= \psi_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Haciendo $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1 \ldots, y_m)$, la función se expresa abreviadamente como

$$f(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{con} \quad \vec{y} = \vec{\psi}(\vec{x})$$

Resulta inmediato que, sustituyendo en f las variables y_i por sus respectivas expresiones $\psi_i(\vec{x})$, resulta una nueva función de sólo n variables

$$f(\vec{x}, \vec{y})|_{\vec{y}=\vec{\psi}(\vec{x})} = f(\vec{x}, \vec{\psi}(\vec{x})) = \phi(\vec{x})$$

de la que podemos calcular los extremos por el método descrito en **9**. Este sería el caso del ejemplo anterior, si sustituimos la condición $y = 1 - x$ en $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

11.2. Condiciones en forma implícita

Se trata ahora de obtener los extremos de la función anterior $f(\vec{x}, \vec{y})$, pero con las m condiciones dadas en forma implícita

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m) = 0 \\ &\vdots \\ &g_m(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m) = 0 \end{aligned}$$

que podemos escribir abreviadamente como $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$.

Método de los multiplicadores de Lagrange. Se demuestra que existen ciertos valores $\lambda_i \in \mathbb{R}$, tales que los extremos de la función f, con las m ligaduras entre sus variables, coinciden con los de la función lagrangiana

$$L = f(\vec{x}, \vec{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\vec{x}, \vec{y})$$

lo que permite simplificar el cálculo de los extremos cuando las condiciones no son explícitas.

Justificación de la condición necesaria. Lo haremos para una función de tres variables sujeta a dos condiciones ($n = 1$, $m = 2$). Veremos que, para obtener los puntos críticos de f con las ligaduras $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, hemos de cumplir las mismas condiciones que para los de L. Sean

$$u = f(x,y,z); \quad g_1(x,y,z) = 0; \quad g_2(x,y,z) = 0$$

La función lagrangiana es

$$L = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2\, g_2(x,y,z)$$

Para obtener los puntos críticos de L se deben cumplir las condiciones

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0} \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0} \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= \boxed{\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} = 0}
\end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Estudiamos ahora la función f. Por el teorema de la función implícita sabemos que, en ciertas condiciones, las igualdades $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ definen dos funciones ψ_1, ψ_2 que las satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, \psi_1(x), \psi_2(x) \;/\; \left\{\begin{array}{l} g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = 0 \\ g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo y y z por sus correspondientes funciones ψ_1, ψ_2, f se convierte en una nueva función

$$f\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big) = \phi(x)$$

que derivaremos respecto a x, para hallar sus posibles extremos.
Teniendo en cuenta que las funciones $g_1\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big)$, $g_2\big(x, \psi_1(x), \psi_2(x)\big)$ son nulas para todo x de un cierto conjunto (por tanto, constantes en él), sus derivadas respecto a x también lo serán.

Derivamos entonces f, g_1 y g_2 usando la regla de la cadena, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0 \\
\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0 \\
\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\frac{d\psi_2}{dx} &= 0
\end{aligned}$$

En estas tres ecuaciones hay sólo dos incógnitas, las derivadas de ψ_1 y ψ_2. Para que exista solución, una de las ecuaciones ha de ser combinación lineal de las otras. Es decir, deben existir $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El coeficiente α ha de ser no nulo. De lo contrario las derivadas de g_1 y g_2 serían proporcionales y no se cumpliría la condición de determinante de $\partial\vec{g}/\partial\vec{y}$ no nulo (apdo. **10.3**). Dividiendo entre α la ecuación y haciendo $\beta/\alpha = \lambda_1, \gamma/\alpha = \lambda_2$, resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando las componentes en ambos miembros, resulta la misma condición necesaria de extremo que teníamos para la función lagrangiana (*).

Aplicación práctica del método. Sea una función $f(x_1,\ldots,y_m)$ con las ligaduras

$$g_1(x_1,\ldots,y_m)=0\,,\; g_2(x_1,\ldots,y_m)=0\,,\;\ldots\; g_m(x_1,\ldots,y_m)=0$$

Escribimos la función lagrangiana

$$L=f+\lambda_1\,g_1+\cdots+\lambda_m\,g_m$$

Puntos críticos. Para hallarlos, aplicamos la **condición necesaria** de extremo derivando L respecto a las $m+n$ variables. Añadimos las m condiciones de ligadura:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}=0};\quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial y_1}=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial y_m}=0};\quad \boxed{g_1=0,\ldots,g_m=0}$$

Hemos obtenido $2m+n$ ecuaciones. Las correspondientes $2m+n$ incógnitas son los puntos $P(a_1,\ldots,a_n,b_1\ldots b_m)$ y los multiplicadores $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

Condición suficiente. En los puntos críticos habrá máximo, mínimo o punto de silla (ni máximo ni mínimo) según el tipo de forma cuadrática que sea $d^2L|_{dg_i=0}$.
La condición $dg_i=0$ significa que, al estudiar la d^2L, hay que tener en cuenta las relaciones entre las diferenciales de las variables debidas a las condiciones $g_i=0$ en forma diferencial. Entonces

$$\boxed{\text{Si } d^2L|_{dg_i=0} \text{ es } \begin{cases}\text{definida positiva} & \Longrightarrow \text{ mínimo}\\ \text{definida negativa} & \Longrightarrow \text{ máximo}\\ \text{indefinida} & \Longrightarrow \text{ p. de silla}\end{cases}}$$

Nota. Si la d^2L es definida, no es necesario estudiar las condiciones $dg_i=0$, pues no van a cambiar el tipo de forma cuadrática. En cambio, cuando la d^2L es semidefinida o indefinida, las relaciones entre las diferenciales de las variables pueden influir en el resultado final.

Ejemplo. Aplicamos el método al ejemplo introductorio, en el que

$$f(x,y)=1-x^2-y^2,\quad g(x,y)=x+y-1=0$$

La función lagrangiana es $L=1-x^2-y^2+\lambda(x+y-1)$. Derivando

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-2x+\lambda=0;\quad \frac{\partial L}{\partial y}=-2y+\lambda=0\Longrightarrow x=y$$

Introduciendo $x=y$ en la condición $x+y-1=0$ resulta el punto $P'(1/2,1/2)$.
Las derivadas segundas son

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=0\Longrightarrow H=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

H es una matriz diagonal, por lo que resulta inmediato ver que es definida negativa. Aplicando el criterio de Sylvester se observa lo mismo, pues los menores principales son $-2,+4$. Como consecuencia, en el punto $P'(1/2,1/2)$ tenemos un máximo.

Ejercicio. Calcula las dimensiones del rectángulo (base x y altura y) de perímetro dado P y área máxima.
Solución. Se trata del cuadrado de lado $P/4$.

12. Ejercicios de autoevaluación

12.1. Test verdadero/falso

Test 1 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Las propiedades de la aplicación"norma euclídea" son: positividad, conmutatividad y desigualdad triangular.

2. Una función vectorial de variable real es continua en $x = a$, si y sólo si cada una de sus componentes es continua en $x = a$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si los límites de f en $\vec{a}$, según las direcciones dadas por $\vec{\omega}$, valen φ, entonces f tiene límite φ en $\vec{a}$.

4. Si existen las derivadas direccionales de una función real de dos variables la función será continua.

5. Las derivadas direccionales de una función f de varias variables dependen siempre de la dirección.

6. Una condición necesaria de diferenciabilidad de una función real de varias variables es que las derivadas parciales sean continuas.

7. El jacobiano de una función vectorial de 3 componentes y 2 variables es una matriz de $3^2 = 9$ elementos.

8. Sean $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Sean $D_f = \mathbb{R}^n$ y $D_g = \mathbb{R}^m$. Si $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son diferenciables en su dominio, entonces $\vec{f} \circ \vec{g}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n$.

9. Sea una función vectorial de variable vectorial. Si se cumple el teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas, el jacobiano de la función es una matriz simétrica.

10. Sea $u = f(x, y, z),\ f \in C^2$. Se cumple $d^2u = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz\right)^{(2}$. Si desarrollamos esta expresión, el coeficiente numérico del término que contiene a $dxdz$ es 2.

Test 2 Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

a) Sea una función $f(x, y),\ f \in C^2$, en todo su dominio. Podemos afirmar que:

1. Su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto (a, b) es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ por el punto $(a, b, f(a, b))$.

2. Si la función $f(x, y) = x^2y^2$, sus derivadas de orden cinco y superior son nulas, por lo que su polinomio de Taylor de cuarto grado en torno al punto $P(1, 1)$ representa exactamente a la función.

b) Estudiamos ahora los extremos relativos de la función $f(x, y),\ f \in C^2$ en puntos en los que sus derivadas parciales son nulas. Podemos afirmar que:

3. La función sólo tendrá extremos si d^2f es definida (positiva o negativa).

4. Si d^2f no es definida y $|H| \neq 0$, se trata de un punto de silla.

5. Si el determinante hessiano es nulo, la diferencial segunda sólo puede ser semidefinida, a pesar de lo cual puede existir un extremo.

6. Si en los puntos críticos la $d^2 f$ resulta ser indefinida, podemos asegurar que la función no tiene extremos.

7. Si la matriz H es semidefinida se trata de un caso dudoso. Pero se puede afirmar que, si es semidefinida positiva, no hay máximo y, si es semidefinida negativa, no hay mínimo.

c) Sea la ecuación $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y = 0$. Sean los puntos $P(0,0)$ y $Q(-1,-1)$.

8. En P se cumplen las condiciones de existencia y diferenciabilidad de la f.i.

9. En Q se cumplen las condiciones de existencia y diferenciabilidad de la f.i.

10. En P, la derivada de la función implícita es nula.

d) Buscamos los extremos de $f(x,y,z)$, con las ligaduras $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

11. Los extremos coinciden con los de la función $L = f + \lambda g_1 + \mu g_2,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

12. Las ecuaciones $g_1 = 0,\ g_2 = 0$ sólo influyen para la obtención de los puntos críticos, no para el estudio del tipo de extremo (condición suficiente).

13. Una vez obtenidos los puntos críticos, tendremos un máximo si $d^2 L|_{dg_i=0,\ i=1,2}$ toma valores negativos $\forall (dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$.

14. En el cálculo de extremos condicionados, el tipo de extremo viene dado por el signo de $d^2 L|_{dg_i=0}$. Pero, si la matriz H es definida, no es preciso utilizar las condiciones $dg_i = 0$.

12.2. Cuestiones

Cuestión 1. Sea f una función real definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Se pide definir el límite direccional y la derivada direccional de f en un punto $\vec{a}$ y razonar la verdad o falsedad de las frases siguientes:

a) Si el límite direccional en $\vec{a}$ depende de la dirección, no existe límite funcional en $\vec{a}$.

b) Si f es diferenciable en $\vec{a}$, la derivada direccional en $\vec{a}$ no depende de la dirección.

Cuestión 2. Sea f una función real definida en $D \subset \mathbb{R}^n$. Se pide enunciar la condición necesaria y la suficiente de diferenciabilidad y razonar la verdad o falsedad de las frases:

a) Si f cumple en D la condición suficiente, entonces cumple la necesaria.

b) Si f cumple en D la condición necesaria, entonces cumple la suficiente.

Cuestión 3. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para obtener sus derivadas direccionales en el origen, calculamos el límite:

$$D_{\vec{\omega}} \vec{f}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda \omega_x, \lambda \omega_y) - f(0,0)}{\lambda} = \cdots = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\omega_x \omega_y}{\lambda}$$

que no tiene valor finito. Sin embargo, calculando las derivadas parciales en el origen por la definición, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f((0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cdots = 0$$

Como las derivadas parciales (que existen) son un caso particular de las direccionales (que parecen no existir), explíquese la razón de esta aparente contradicción.

Cuestión 4. Razónese la verdad o falsedad de la afirmación siguiente: "Sea f una función real de 2 variables, diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Su gradiente en el punto $P(a,b)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ que indica la dirección de mínima variación de f, a partir de su valor en P".

Cuestión 5. Enuncia el Teorema de existencia y diferenciabilidad de la función implícita.

Cuestión 6. Sea $F(x,y) = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x = 0$. Puede comprobarse que se cumplen las condiciones para que la ecuación $F(x,y) = 0$ defina una función implícita en un entorno del punto $P(\pi/2, \pi/2)$ (que no es otra que $y = x$). Por otro lado, vemos que también es solución de la ecuación la función $y = 0$, recta que corta a $y = x$ en el (0,0).

Lo anterior parece significar que, en todo entorno del (0,0), existen dos funciones implícitas ($y = x$ e $y = 0$). Pero el teorema afirma que, en ciertas condiciones, la función implícita definida por $F(x,y) = 0$ es única en un cierto entorno de $P(a,b)$. ¿No se cumple entonces el teorema?

12.3. Solución de los test verdadero/falso

Test 1.

1. **F**. Las 3 propiedades son: positividad, producto por un escalar y desigualdad triangular.
2. **V**. Ver apdo. **3.2.**
3. **F**. Que existan límites según las infinitas direcciones rectas que parten del punto, y coincidan, no significa que tenga que existir límite al aproximarnos al punto según cualquier curva. Existe un ejemplo de este caso en los documentos de apoyo del tema).
4. **F**. La existencia de derivadas direccionales no asegura la diferenciabilidad, por lo que tampoco asegura la continuidad. Si f admite derivada en una dirección, el límite de f en $\vec{a}$ coincidirá con $f(\vec{a})$ sólo en esa dirección.
5. **F**. No siempre. Por ejemplo, si una función diferenciable tiene un extremo en un punto interior del dominio, las derivadas direccionales en ese punto, según cualquier dirección, serán nulas.
6. **F**. No es condición necesaria, sino suficiente de diferenciabilidad.
7. **F**. El jacobiano de una función vectorial de 3 componentes y 2 variables es una matriz de $3 \times 2 = 6$ elementos.
8. **F**. Hemos definido la función compuesta diciendo que $(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$. Con esta definición, $\vec{f} \circ \vec{g}$ no tiene por qué ser diferenciable, pues puede ni siquiera existir. En efecto, si $p \neq n$, los elementos $\vec{g}(\vec{x})$ no serán variables de la función $\vec{f}$. En cambio $\vec{g} \circ \vec{f}$ existe y es diferenciable (ver apdo. **6.2**).
9. **F**. El jacobiano de una función vectorial, de m componentes y n variables, es la matriz $m \times n$ de las derivadas parciales y ni siquiera tiene por qué ser cuadrada. Quien es simétrica, si se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Schwarz, es la matriz cuadrada de las derivadas segundas (matriz hessiana o hessiano).
10. **V**. El desarrollo del cuadrado **simbólico** de una suma contiene la suma de "cuadrados" más la de "dobles productos". Uno de estos últimos es el que se pide, $2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\, dxdz$.

Test 2.

1. **F**. La ecuación del plano tangente viene dada por el polinomio de Taylor de grado 1 (ver apdo. **8.1**).

2. **V**. De las 16 derivadas de cuarto orden sólo serán distintas de cero las 6 en las que se deriva 2 veces respecto de x y 2 respecto de y (todas valdrán 4). Por tanto las derivadas de orden mayor que 4 serán nulas. El resultado es un polinomio de grado 4, en potencias de $(x-1)$ e $(y-1)$. Si operamos y simplificamos obtendremos la expresión de la función.

b) Estudiamos ahora los extremos relativos de la función $f(x,y),\ f \in C^2$ en puntos en los que sus derivadas parciales son nulas. Podemos afirmar que:

3. **F**. Puede haber extremos con d^2f semidefinida. Ejemplo: $f(x,y) = x^2 + y^4$ en el punto $P(0,0)$ (ver apdo. **9.2** y el doc. de apoyo "Ejemplo de forma cuadrática semidefinida").

4. **V**. Si $|H| \neq 0$, ningún elementos de la matriz diagonal es nulo. Como no pueden ser ambos positivos (la f. cuadrática sería definida positiva), ni negativos (sería definida negativa), deben ser de distinto signo, por lo que es indefinida y se tratará de un punto de silla.

5. **V**. Si $|H| = 0$, al menos un elemento diagonal es nulo. Como hay dos, no pueden ser de distinto signo, luego es semidefinida, pero puede existir un extremo (test 2, cuestión 3).

6. **F**. Puede tener extremos en algún punto de la frontera, aunque sus derivadas parciales no sean nulas en dicho punto.

7. **V**. Si la matriz hessiana es semidefinida se trata de un caso dudoso, sin solución única, lo que no significa que no podamos afirmar nada:

   - Si es semidefinida positiva, para algún $d\vec{x}$ será $d^2f > 0 \Longrightarrow \Delta f > 0$ (la función crece al apartarnos del punto, al menos en una dirección), luego no puede tratarse de un máximo.

   - Si es semidefinida negativa, para algún $d\vec{x}$ será $d^2f < 0 \Longrightarrow \Delta f < 0$ (la función decrece al apartarnos del punto, al menos en una dirección), luego no puede tratarse de un mínimo.

c) Sea la ecuación $F(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y = 0$. Sean los puntos $P(0,0)$ y $Q(-1,-1)$.

8. **V**. La función y sus derivadas parciales respecto a x e y son continuas en todo punto. En P se anula F y no su derivada respecto a y, luego se cumplen las condiciones.

9. **F**. La función y sus derivadas parciales respecto a x e y son continuas en todo punto. En Q se anula F y también su derivada respecto a y, luego no se cumplen las condiciones.

10. **V**. En P la $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, por lo que $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = 0$.

d) Buscamos los extremos de $f(x,y,z)$, con las ligaduras $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

11. **F**. $\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$ para los que se cumple el enunciado, pero no se cumple $\boxed{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$.

12. **F**. Si las derivadas segundas de la funciones g_i no son nulas, sus diferenciales formarán parte de la diferencial segunda de la función lagrangiana, por lo que las condiciones de ligadura influirán en el tipo de extremo.

13. **V**. Ver apdo. **11.2.**

14. **V**. Ver apdo. **11.2.**

12.4. Solución de las cuestiones

Cuestión 1. Definimos limite y derivada direccionales:

El **límite direccional** es el valor al que tiende f cuando nos acercamos a $\vec{a}$ a través del subconjunto $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{\omega}\}$. Es decir, se obtiene como $\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega})$.

La **derivada direccional** viene dada por la expresión:

$$D_{\vec{\omega}} f(\vec{a}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{a} + \lambda\vec{\omega}) - f(\vec{a})}{\lambda}$$

Entonces:

a) El límite de f en $\vec{a}$ es el valor al que tiende f cuando $\vec{x} \to \vec{a}$ por cualquier camino. Si existe, cualquier límite direccional coincide con él. Si el límite direccional depende de la dirección, no tendrá un valor único y no existirá límite funcional. **La afirmación es verdadera**.

b) Si f es diferenciable, tiene derivadas direccionales y se cumple $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$. Entonces la derivada direccional depende de la dirección (dada por $\vec{\omega}$). **La afirmación es falsa**.

Cuestión 2. Definimos las condiciones necesaria y suficiente:

Condición necesaria: Si f es diferenciable en D, tiene derivadas direccionales en D y se cumple: $D_{\vec{\omega}} f = \vec{g} \cdot \vec{\omega}$.

Condición suficiente: Si f tiene derivadas parciales continuas en D, es diferenciable en D.

Entonces:

a) Si f cumple la condición suficiente, entonces es diferenciable, por lo que cumple la condición necesaria. **La afirmación es verdadera**.

b) Si f cumple la condición necesaria, tiene derivadas direccionales, luego tiene derivadas parciales (que son un caso particular). Pero no podemos asegurar que estas sean continuas, por lo que no se cumple la condición suficiente. **La afirmación es falsa**.

Cuestión 3. Se dice en el enunciado que el límite no tiene valor finito, lo cual sólo es cierto si el numerador es distinto de cero. Si el numerador es nulo, también lo es el límite. En efecto, si calculamos el límite tomando para $\vec{\omega}$ las direcciones de los vectores unitarios $\vec{\omega}_1 = (1, 0)$ y $\vec{\omega}_2 = (0, 1)$, que corresponden a las direcciones de los ejes, obtenemos los valores

$$D_{(1,0)}\vec{f}(0, 0) = \cdots = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1 \cdot 0}{\lambda} = 0, \quad D_{(0,1)}\vec{f}(0, 0) = \cdots = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0 \cdot 1}{\lambda} = 0$$

que coinciden con los de las derivadas parciales, por lo que **no existe contradicción**.

Cuestión 4. Si f tiene dos variables x e y, su vector gradiente tiene como componentes las derivadas parciales de f respecto a x e y, por lo que será un vector de $\mathbb{R}^2$.

Este vector no indica la dirección de mínima variación de la función f, sino la de variación máxima. La variación será mínima (nula) en la dirección perpendicular al vector gradiente en cada punto, que es la condición de las curvas de nivel. Esto se puede justificar a partir de la fórmula de la derivada direccional

$$D_{\vec{\omega}} f = \vec{g}^t \cdot \vec{\omega} = \|\vec{g}\|\|\vec{\omega}\| \cos\varphi = \|\vec{g}\| \cos\varphi,$$

donde vemos que la variación será máxima en la dirección dada por el vector gradiente: si $\varphi = 0$, el $\cos\varphi$ vale 1. Será mínima (nula) en la dirección perpendicular: si $\varphi = \pi/2$, el $\cos\varphi$ vale 0.

Así pues, aunque su primera parte es verdadera, **la afirmación es falsa**.

Cuestión 5. El teorema afirma lo siguiente:

Sea F una función continua de dos variables. Sea la ecuación $F(x,y) = 0$. Si las derivadas parciales $\partial F/\partial x$ y $\partial F/\partial y$ son continuas y existe un punto $P(a,b)$ en el cual

$$F(a,b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

entonces $F(x,y) = 0$ define como función implícita de x a una única función continua $y = \psi(x)$, en un entorno de $x = a$, $y = b$, la cual es diferenciable.

Cuestión 6. Como el punto $P(\pi/2, \pi/2)$ cumple las condiciones del teorema, existe un entorno suyo* en el que existe una única función implícita (la función $y = x$). En cambio, $Q(0,0)$ no cumple la condición "derivada respecto a y distinta de cero", por lo que no podemos asegurar que en algún entorno suyo haya una única función. De hecho, en todo entorno suyo existen cuatro soluciones de la ecuación $F(x,y) = 0$: las rectas $y = \pm x$, $y = 0$, $x = 0$, que se cortan en el origen.

Tomemos, por ejemplo, cualquier punto en la recta $y = 0$, distinto del origen, por ejemplo $R(1,0)$. Vemos que en él sí se cumplen las condiciones del teorema y, por tanto, en un cierto entorno suyo** existe una única función implícita (que ahora es la función $y = 0$).

(*) Existen infinitos entornos. Por ejemplo, los círculos de centro en P y radio $r < 1$.

(**) Existen infinitos entornos. por ejemplo, los círculos de centro en R y radio $r < \dfrac{1}{2}$.

Tema III. Series numéricas (09.04.2024)

1. Definición

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, queremos obtener la suma de sus términos. Al tratarse de infinitos sumandos, no podemos efectuar la suma directamente.

La manera de hacerlo es definir una nueva sucesión cuyos elementos sean las sumas de los términos de $\{a_n\}$ en número creciente y tomar límites, cuando ese número tienda a ∞.

Así pues,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

$\{S_n\}$ es la **sucesión de sumas parciales** asociada a $\{a_n\}$, a la que llamaremos **serie**. Los sumandos $a_1, a_2, \ldots$ son los **términos de la serie** y a_n es el **término general**.

Obtendremos la suma de la serie calculando el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Representaremos preferentemente una serie como

$$\sum a_n$$

reservando para su suma la expresión

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

No obstante, esta segunda forma -que tiene la ventaja de indicar el primer elemento considerado- se utiliza también con frecuencia para referirse a la serie.

Carácter. Llamamos carácter de una serie al de la sucesión de sumas parciales. Entonces diremos que una serie es

a) Convergente, si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. El límite S es la **suma de la serie**.

b) Divergente, si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \infty$.

c) Oscilante, si no converge ni diverge.

Ejemplos.

- La serie armónica (inversos de los naturales): $\sum \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots$
- La serie de las potencias de -1: $\sum (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots$
- La serie de las potencias de $1/2$: $\sum \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$
- La serie de los inversos de las raíces de los impares: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$

2. Serie geométrica

Una vez definidas las series, vamos a estudiar un caso particular, el de la serie geométrica, en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante llamada **razón**. Los sucesivos términos son:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 r \\
a_3 &= a_2 r = a_1 r^2 \\
a_4 &= a_3 r = a_1 r^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}
\end{aligned}$$

Carácter. Para estudiarlo, calculamos primero la suma de n términos a partir del primero de ellos y la razón y hacemos luego tender n a infinito. La suma S_n vale

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Multiplicándola por r

$$S_n\, r = a_1 r + a_2 r + a_3 r + \cdots + a_n r$$

Restamos ahora ambas expresiones, recordando que cada término es igual al anterior multiplicado por r, por lo que desaparecen todos los términos excepto dos. Obtenemos

$$S_n\,(1-r) = a_1 - a_n r = a_1 - a_1 r^{n-1} r = a_1 - a_1 r^n$$

de donde despejamos S_n

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)}$$

Resultan los siguientes casos

$$\begin{array}{rcllr}
r > 1 & \Longrightarrow & S_n = a_1 \dfrac{r^n - 1}{r-1} & \Longrightarrow S_n \to \infty \cdot \text{signo}(a_1) & \text{(D)} \\
r = 1 & \Longrightarrow & S_n = n\, a_1 & \Longrightarrow S_n \to \infty \cdot \text{signo}(a_1) & \text{(D)} \\
-1 < r < 1 & \Longrightarrow & r^n \to 0 & \Longrightarrow S_n \to \dfrac{a_1}{1-r} & \text{(C)} \\
r = -1 & \Longrightarrow & S_n = a_1 - a_1 + a_1 - \ldots & \Longrightarrow S_n = \begin{cases} a_1, & n\,\text{impar} \\ 0, & n\,\text{par} \end{cases} & \text{(O)} \\
r < -1 & \Longrightarrow & |S_n| = \left|\dfrac{a_1}{r-1}\right| |r^n - 1| & \Longrightarrow |S_n| \to \infty & \text{(D)}
\end{array}$$

Vemos que la serie geométrica sólo converge para $|r| < 1$. En los demás casos diverge u oscila.

3. Condición necesaria de convergencia

Teorema. *Si una serie converge, su término general tiende a 0* (condición no suficiente).

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Demostración. Si $\sum a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales tiene límite ($n \to \infty$), que será el mismo tanto si tomamos n términos como $n-1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

4. Propiedades de las series numéricas

1) *Si intercalamos en la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un número finito de términos de suma* b*, el carácter de la serie* $\sum_n a_n$ *no varía y, si converge, su suma aumenta en* b*.*

D: Sea $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = b$. Tomando una suma parcial suficientemente avanzada, de modo que los contenga a todos, resulta

$$S'_{n+q} = S_n + b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S'_{n+q} = \lim_{n\to\infty}(S_n + b)$$

Entonces, por las propiedades de los límites,

- Si S_n es convergente a S, S'_n es convergente a $S + b$.
- Si S_n es divergente, S'_n es divergente.
- Si S_n es oscilante, S'_n es oscilante.

Nota: *Si suprimimos en* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un número finito de términos de suma* b*, el carácter de la serie no varía y, si converge, su suma disminuye en* b. Se demuestra análogamente, sumando los opuestos de los términos que queremos suprimir.

2) *Si multiplicamos todos los términos de una serie por un número real* $\lambda \neq 0$*, su carácter no varía y, si converge, su suma queda multiplicada por* λ*.*

D: La nueva sucesión de sumas parciales es

$$\begin{aligned}
S'_1 &= \lambda a_1 && = \lambda S_1 \\
S'_2 &= \lambda a_1 + \lambda a_2 && = \lambda S_2 \\
&\vdots \\
S'_n &= \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda S_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}(\lambda S_n),
\end{aligned}$$

con lo que, por las propiedades de los límites, ambas series tienen el mismo carácter.

3) *Si una serie es* ***convergente o divergente****, se pueden sustituir varios términos por su suma efectuada sin que varíe el carácter (ni la suma, si converge).*

D: Al sustituir algunos términos por su suma, la nueva sucesión de sumas parciales $\{S'_n\}$ tendrá menos términos que la antigua $\{S_n\}$, pero todos los términos de la nueva pertenecerán a la antigua. Es decir, $S'_1, S'_2, \ldots S'_n$ es una subsucesión de $S_1, S_2, \ldots S_n$. Entonces:

a) S'_n tiene igual límite que S_n, si esta converge (P. **7** de los límites de sucesiones).

b) S'_n diverge, si lo hace S_n. En efecto, al ser S'_n subsucesión de S_n, los términos de S'_n pertenecen también a S_n, por lo que cumplen la condición de divergencia.

4) Si en una serie suprimimos los n primeros términos, la serie resultante se llama **resto de orden** n: $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ Se cumple que *el resto de orden* n *de una serie convergente es convergente y su suma tiende a 0 cuando* $n \to \infty$*.*

D: Dada una serie convergente, su suma parcial de orden p es $S_p = \sum_{i=1}^{p} a_i$ y la suma de la serie (que expresamos como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$) valdrá $S = \lim_{p\to\infty} S_p$.

Para un n dado, la serie resto R_n se obtiene eliminando de la inicial los n primeros términos, de suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Las sumas parciales de R_n serán las de la serie inicial, disminuidas en el valor S_n, es decir $R_n^p = \sum_{i=n+1}^{p} a_i = S_p - S_n$.

Entonces, haciendo $p \to \infty$, la suma R_n^∞ de la serie R_n será

$$R_n^\infty = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \lim_{p\to\infty} (S_p - S_n) = S - S_n \in \mathbb{R}$$

con lo que el resto R_n es una serie convergente.

Si ahora hacemos tender $n \to \infty$, se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0$.

5) Dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$, su **combinación lineal** es la serie cuyo término general es la combinación lineal de los términos generales, $\sum(\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$. Se cumple que *la combinación lineal de series convergentes es convergente y su suma es la combinación lineal de las sumas.*

D: Si ambas series convergen, sus sumas parciales $S_n^a = \sum_{i=1}^n a_i$ y $S_n^b = \sum_{i=1}^n b_i$ cumplirán: $\{S_n^a\}_{n\in\mathbb{N}} \to S^a$, $\{S_n^b\}_{n\in\mathbb{N}} \to S^b$. La suma parcial de la serie c.l. será $\sum_{i=1}^n(\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i = \alpha S_n^a + \beta S_n^b$ y tendremos, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\alpha S_n^a + \beta S_n^b\right) = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n^a + \beta \lim_{n\to\infty} S_n^b = \alpha S^a + \beta S^b.$$

Las dos siguientes propiedades se refieren sólo a **series de términos positivos** (S.T.P.). Como se justifica más adelante (apdo. **6**), estas series nunca son oscilantes.

6) *Si alteramos el orden de los términos de una S.T.P. no varía el carácter (ni la suma, si converge).*

D: Sean $\sum a_n$ y $\sum a_n'$ las mismas series con los términos en distinto orden.

Al tener ambas los mismos términos (y ser éstos no negativos), para toda suma parcial de $\sum a_n$ podemos encontrar una suma parcial de $\sum a_n'$ que la supere: basta tomar un índice m tal que S_m' contenga todos los términos de S_n, por lo que $n \le m$.

Podemos ahora hacer lo mismo con S_m', encontrando un índice p tal que S_p contenga todos los términos de S_m', con lo que $m \le p$. Entonces,

$$\forall n\ \exists\ m, p \big/ S_n \le S_m' \le S_p \quad (n \le m \le p)$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{p\to\infty} S_p$, resulta

- Si S_n converge, S_m' también lo hace (P. **6** de los límites de sucesiones).
- Si S_n diverge a ∞, al ser $S_n \le S_m'$, esta tambien lo hace.

Luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} S_m' \text{ (finito o infinito).}$$

7) *Si se agrupan un número finito o infinito de términos de una S.T.P. o se descomponen en suma de términos* ***positivos****, no se altera el carácter de la serie (ni la suma, si converge).*

D: Como las S.T.P. no son oscilantes, podemos aplicar la P.**3** de las series. Entonces:

a) Si agrupamos términos de la serie $\sum a_n$, no varían el carácter ni la suma.

b) Si descomponemos términos de $\sum a_n$ en suma de términos positivos obtendremos una nueva serie $\sum a_n'$. Si, partiendo ahora de $\sum a_n'$, reagrupamos los términos que antes descompusimos, obtendremos de nuevo la serie inicial $\sum a_n$. Pero esta, por la P.**3**, tendrá igual carácter y suma que $\sum a_n'$.

Así pues, tanto si agrupamos términos como si los descomponemos en suma de términos positivos, no varía el carácter (ni la suma, si converge).

5. Criterio de convergencia de Cauchy

Dada una sucesión $\{a_n\}$, hemos definido su serie asociada $\sum a_n$ como una sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, siendo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

de modo que la serie converge si y sólo si lo hace $\{S_n\}$. Como vimos al estudiar los números reales, en $\mathbb{R}$ una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy. Entonces $\sum a_n$ será convergente si y sólo si la sucesión $\{S_n\}$ es de Cauchy. Esta condición puede expresarse de dos maneras:

a) $\boxed{\sum a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \big/ \ |S_p - S_q| < \varepsilon,\ \forall p, q \geq n_0}$

La serie converge si la diferencia en valor absoluto de dos sumas parciales suficientemente avanzadas es tan pequeña como queramos.

Sea $p > q$. Entonces $S_p - S_q$ puede escribirse como: $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i=1}^{q} a_i = \sum_{i=q+1}^{p} a_i$.

Si en la expresión anterior hacemos $q = m$ y $p - q = t$, es decir $p = m + t$, la condición se convierte en:

b) $\boxed{\sum a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big/ \left| \displaystyle\sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \right| < \varepsilon,\ \forall m \geq n_0,\ \forall t \in \mathbb{N}}$

Es decir, la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la suma de un número cualquiera de términos, a partir de uno dado m, se puede hacer tan pequeña como se quiera sin más que tomar un m suficientemente alto. Esta condición se usará en el primero de los criterios de convergencia que veremos a continuación (**6.1.** Mayorante y minorante).

Que esta expresión pueda hacerse tan pequeña como se quiera para m suficientemente alto, equivale decir que tiene límite cero, si m tiende a ∞. Es decir, la condición **b)** puede también escribirse como:

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \lim_{m\to\infty} \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i = 0,\ \forall t \in \mathbb{N}$$

6. Series de términos positivos. Criterios de convergencia

Definición. Llamamos series de términos positivos (S.T.P.) a aquellas cuyos **términos** son **mayores o iguales a cero**. Como consecuencia,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ a_i \geq 0 \Longrightarrow S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \ldots$$

es decir, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente. Entonces caben dos opciones:

a) $\{S_n\}$ está acotada, luego converge (por ser monótona creciente acotada).

b) $\{S_n\}$ no está acotada, luego diverge (sus términos llegan a superar cualquier valor).

Por lo tanto, **una S.T.P. sólo puede ser convergente o divergente**, nunca oscilante.

A continuación estudiaremos distintos criterios de convergencia para este tipo de series.

6.1. Mayorante y minorante

Sean las series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$. Decimos que $\sum b_n$ es mayorante de $\sum a_n$ si y sólo si

$$a_n \le b_n \quad \forall n \ge n_1$$

Si $\sum b_n$ es mayorante de $\sum a_n$, se dice que esta es minorante de $\sum b_n$.

Ejemplos.

1. $\sum \dfrac{1}{n+7}$ es minorante de $\sum \dfrac{1}{n}$, pues $\dfrac{1}{n+7} < \dfrac{1}{n}\ \forall n$.
2. $\sum \dfrac{1}{n+7}$ es mayorante de $\sum \dfrac{1}{n^2}$, pues , $\dfrac{1}{n+7} > \dfrac{1}{n^2}\ \forall n > 3$.

Se cumple:

a) Si la mayorante es convergente, la minorante también lo es.

b) Si la minorante es divergente, la mayorante también lo es.

Demostración. Aplicando la condición de mayorante $\forall m \ge n_1$, se cumplirá:

$$\left\{\begin{matrix} a_{m+1} \le b_{m+1} \\ a_{m+2} \le b_{m+2} \\ \vdots \\ a_{m+t} \le b_{m+t} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \le \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i,\ \forall m \ge n_1, \forall t \in \mathbb{N} \tag{1}$$

a) Por el criterio general de convergencia de Cauchy (apdo. **5**), resulta:

$$\sum b_n \text{ convergente} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \,/\, \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i < \varepsilon,\ \forall m \ge n_0,\ \forall t \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Por tanto, teniendo en cuenta las condiciones (1) y (2),

$$\exists n = \text{máx}(n_0, n_1) \,/\, \sum_{i=m+1}^{m+t} a_i \le \sum_{i=m+1}^{m+t} b_i < \varepsilon,\ \forall m \ge n, \forall t \in \mathbb{N}$$

luego $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ también lo es, por reducción al absurdo. En efecto, si $\sum b_n$ no diverge, al ser de términos positivos tiene que converger, con lo que su minorante $\sum a_n$ también sería convergente, contra la hipótesis.

6.2. Serie de Riemann

Es cualquier serie de la forma $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0}$

A partir del criterio anterior y del carácter de la serie geométrica, se demuestra que:

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1\text{, la serie converge. Si } \alpha \le 1\text{, la serie diverge}}$$

Ejemplos. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $\sum \dfrac{1}{n}$ (armónica) divergen, mientras que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ y $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ convergen.

Demostración. Escribimos la expresión de la suma parcial S_n de la serie de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

Como se trata de una serie de términos positivos, podemos agrupar sus términos. Tomamos grupos de un número creciente de términos: 1, 2, 4, 8, 16. . . .

$$S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}\right) + \dots$$

Escribimos ahora las expresiones de una minorante S_n^- y una mayorante S_n^+, de S_n

$$\begin{aligned} S_n^- &= \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{16^\alpha} + \cdots + \frac{1}{16^\alpha}\right) + \dots \\ S_n^+ &= \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \dots \end{aligned}$$

Entre ellas, $\forall n > 2$, se cumple la relación

$$S_n^- < S_n < S_n^+$$

Estudiamos ahora S_n^+, agrupando los términos de igual valor

$$S_n^+ = 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots = 1 + 2^{1-\alpha} + 4^{1-\alpha} + 8^{1-\alpha} + \dots$$

y S_n^+ resulta ser una serie geométrica de razón $r = 2^{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$, se cumplirá

$$1 - \alpha < 0 \Longrightarrow 0 < 2^{1-\alpha} < 1$$

con lo que la razón es menor que 1 en valor absoluto, luego S_n^+ converge (apdo. **2**). Entonces su minorante S_n converge también (apdo. **6.1**).

Haciendo lo mismo con S_n^-

$$S_n^- = \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \frac{4}{8^\alpha} + \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \dots\right)$$

y hemos obtenido de nuevo una serie geométrica de razón $r = 2^{1-\alpha}$. Si $\alpha \leq 1$, se cumplirá

$$1 - \alpha \geq 0 \Longrightarrow 2^{1-\alpha} \geq 1$$

con lo que la razón es mayor o igual que 1, luego S_n^- diverge (apdo. **2**). Entonces su mayorante S_n diverge también (apdo. **6.1**).

Por lo tanto

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge,} \quad \alpha \leq 1 \Longrightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

Ejercicios. Teniendo en cuenta los apdos. **6.1** y **6.2**, estudia el carácter de las series siguientes:

$$\sum \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^\pi} \quad (\mathrm{C})\,; \qquad \sum \frac{2 + \cos n}{n^{\pi-3}} \quad (\mathrm{D})$$

6.3. Comparación de series

). Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$, $a_n, b_n > 0$. $\boxed{\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0, \text{ ambas series tienen el mismo carácter}}$

Demostración. La existencia del límite k equivale a que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \,/\, \left| \frac{a_m}{b_m} - k \right| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n$$

es decir:

$$k - \varepsilon < \frac{a_m}{b_m} < k + \varepsilon \iff (k - \varepsilon)\, b_m < a_m < (k + \varepsilon)\, b_m, \quad \forall m \geq n$$

A partir de la relación anterior, si $\sum b_n$ diverge, $\sum (k - \varepsilon)\, b_n$ diverge, pues su término general es el de $\sum b_n$ multiplicado por una constante. Luego su mayorante $\sum a_n$ diverge.

Igualmente, si $\sum b_n$ converge, $\sum (k + \varepsilon)\, b_n$ converge, luego su minorante $\sum a_n$ también lo hace.

Por lo tanto, sea cual sea el carácter de la serie $\sum b_n$, el de $\sum a_n$ será el mismo.

Aplicación. Al estudiar series de términos positivos, podemos **sustituir el término general por un infinitésimo equivalente**, sin que varíe el carácter.

Nota. Aunque el límite del cociente de los términos generales no sea un $k \neq 0$, existen dos casos en los que ambas series tienen igual carácter. A partir de la definición de límite y el criterio de la mayorante, se demuestra lo siguiente:

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

Ejemplo 1.

a) La serie $\sum \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ tiene igual carácter que $\sum \frac{1}{n}$ (armónica), luego diverge.

b) La serie $\sum \left(e^{1/n^2} - 1 \right)$ tiene igual carácter que $\sum \frac{1}{n^2}$ (Riemann, $\alpha = 2$), luego converge.

c) Sea $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Sea $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ ($\alpha > 1$, convergente). $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Longrightarrow \sum a_n$ converge.

Como vemos, combinando **6.2** y **6.3** podemos estudiar el carácter de algunas series:

1. Hallamos un infinitésimo a'_n (equivalente a a_n), de expresión más sencilla.
2. Si $\sum a'_n$ tiene igual carácter que una serie de Riemann, podemos conocerlo según el valor de α.

Ejemplo 2. Estudiamos el carácter de las series de término general a_n:

a) $a_n = \operatorname{sen} \frac{2n+1}{n^3} \sim \frac{2n+1}{n^3} \sim \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum a_n$ tiene igual carácter que $2 \sum \frac{1}{n^2}$, luego converge.

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n + 4 \ln n}} = \frac{1}{\sqrt{4n}\sqrt{1 + (\ln n)/n}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/2}} \Rightarrow \sum a_n$ diverge, pues $\alpha = 1/2 < 1$.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ (C) ; $\sum \frac{k^2}{(n+k)^2}, k \in \mathbb{R}$ (C).

Los siguientes criterios (**6.4** a **6.7**) se enuncian de dos formas. **La primera** expresa una condición a partir de un término dado y **se utiliza para demostrar los criterios**. **La segunda** consiste en el cálculo de un límite y **es más sencilla para aplicarlos**.

Si se cumple la segunda condición, se cumple la primera, como se demuestra en **6.4**.

6.4. Criterio de la raíz (Cauchy-Hadamard)

a) $$\text{Si } \forall m \geq n_0 \begin{cases} \sqrt[m]{a_m} \leq k < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} & \text{(a.1)} \\ \\ \sqrt[m]{a_m} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} & \text{(a.2)} \end{cases}$$

b) $$\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} & \text{(b.1)} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} & \text{(b.2)} \\ l = 1 \Rightarrow \text{dudoso (si } \sqrt[n]{a_n} \to 1^+\text{, D)} & \text{(b.3)} \end{cases}$$

Demostración. (a partir de la condición **a**)

a.1. Si $\forall m \geq n_0$, $\sqrt[m]{a_m} \leq k < 1$, entonces $a_m \leq k^m$, con $k < 1$.

Por tanto $\sum a_n$ es minorante de una geométrica convergente, luego es convergente.

a.2. Si $\forall m \geq n_0$, $\sqrt[m]{a_m} \geq 1$, entonces $a_m \geq 1$.

Por tanto $\sum a_n$ es mayorante de la serie de término general $a_n = 1$, luego es divergente.

Nota. Si se cumple la segunda condición, se cumple también la primera. En efecto:

b.1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, tomamos un valor entre l y 1 $\big($p. ej. $k = (l+1)/2\big)$, luego $l < k < 1$.

Por las propiedades de los límites, si el límite es menor que k, los términos también lo serán a partir de uno dado, es decir

$$\exists n_0 \big/ \sqrt[m]{a_m} < k < 1, \forall m \geq n_0$$

Entonces se cumple la condición **a.1** y la serie $\sum a_n$ converge.

b.2. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$, los términos también serán mayores que 1 a partir de uno dado, es decir

$$\exists n_0 \big/ \sqrt[m]{a_m} > 1, \forall m \geq n_0$$

Entonces se cumple la condición **a.2** y la serie $\sum a_n$ diverge.

b.3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1^+$ (los términos tienden a 1 por la derecha), entonces serán mayores o iguales que 1 a partir de uno dado, por lo que

$$\exists n_0 \big/ \sqrt[m]{a_m} \geq 1, \forall m \geq n_0$$

Se cumple también la condición **a.2** y la serie $\sum a_n$ diverge.

Aplicación. Este criterio está especialmente indicado cuando a_n contiene potencias $n-$ésimas. Es válido también con expresiones factoriales, utilizando la fórmula de Stirling.

Ejemplo. Carácter de $\sum \dfrac{P(n)}{2^n}$. Calculamos $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ (C) ; $\sum \dfrac{e^n}{n^3}$ (D) ; $\sum \dfrac{\ln n}{n^n}$ (C) ; $\sum \dfrac{n^2}{n!}$ (C).

6.5. Criterio del cociente (D'Alembert)

a) Si $\forall m \geq n_0$ $\begin{cases} \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \leq k < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} & \text{(a.1)} \\ \\ \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} & \text{(a.2)} \end{cases}$

b) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Rightarrow \text{ dudoso, } \left(\text{si } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1^+, \text{ D}\right) \end{cases}$

Demostración. (a partir de la condición **a**)

a.1. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \leq k < 1$, entonces $a_{m+1} \leq k\, a_m$. Dando valores a m, obtenemos

$$\begin{array}{rclcl} a_{n_0+1} & \leq & k\, a_{n_0} & = & k\, a_{n_0} \\ a_{n_0+2} & \leq & k\, a_{n_0+1} & \leq & k^2\, a_{n_0} \\ & \vdots & & & \end{array}$$

Sumando en ambos miembros, resulta $\sum_{n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0}\,(1 + k + k^2 + \dots)$, por lo que $\sum a_n$ converge, al ser $a_{n_0}(1 + k + k^2 + \dots)$ una serie geométrica de razón $k < 1$ (convergente).

a.2. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq 1$, entonces $a_{m+1} \geq a_m$, por lo que $\{a_n\}$ es monótona creciente a partir de $n = n_0$. Además, al ser a_{n_0} positivo (pues existe el cociente para $m = n_0$), se cumplirá

$$a_m \geq a_{n_0} > 0,\ \forall m \geq n_0$$

luego a_n no puede tener límite nulo y no se cumple la condición necesaria de convergencia. Así pues, $\sum a_n$ no converge, por lo que (al ser de téminos positivos), diverge.

Nota. Sabemos, por la "regla de la raíz" de las sucesiones (CI1, tema III, apdo 5.4.) que, si existe el límite del cociente, existe el de la raíz y coinciden, es decir:

$$\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces, siempre que existe el límite del cociente, existe el de la raíz, pero puede ocurrir que el límite del cociente no exista y sí lo haga el de la raiz. Por tanto, el criterio de la raiz soluciona un mayor número de casos que el del cociente.

Aplicación. Este criterio está especialmente indicado cuando el término general contiene factoriales y también da buen resultado con potencias n-ésimas.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series.

1. $\sum \dfrac{2^n}{n!}$. Calculamos $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{2^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ C.
2. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{\sqrt{n}}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\,\dfrac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{\ln n}{n!}$ (C); $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^n}$ (C); $\sum \dfrac{\ln n}{e^n}$ (C); $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ (D).

6.6. Criterio de Raabe

a) Si $\forall m \geq n_0 \begin{cases} m\left(1 - \dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right) \geq k > 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ \\ m\left(1 - \dfrac{a_{m+1}}{a_m}\right) \leq 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \end{cases}$

b) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l \begin{cases} l > 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l < 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Longrightarrow \text{ dudoso (si } n\big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\big) \to 1^-\text{, D)} \end{cases}$

(Puede verse la demostración en J. Burgos, pg. 456).

Nota. En este criterio, al revés que en los de Cauchy y D'Alembert, la convergencia se obtiene para valores de l mayores que 1 y la divergencia para valores menores que 1.

Aplicación. Este criterio es menos utilizado que los dos anteriores por ser la expresión del límite algo más compleja. Es particularmente útil cuando resulta un caso dudoso al aplicar D'Alembert, pues ya tenemos calculado el cociente entre a_{n+1} y a_n.

Ejemplo. Estudiamos el carácter de la serie de término general $a_n = \dfrac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$.

La expresión de a_n sugiere utilizar el criterio de D'Alembert. Calculamos el límite del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{a+n+1}{b+n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

luego es un caso dudoso. Entonces aplicamos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a+n+1}{b+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n+1-(a+n+1)}{b+n+1}\right) = b - a$$

Por tanto:

- Si $b - a > 1\,(\Leftrightarrow b > a+1)$, la serie es convergente.
- Si $b - a < 1\,(\Leftrightarrow b < a+1)$, la serie es divergente.
- Si $b - a = 1\,(\Leftrightarrow b = a+1)$, llegamos (de nuevo) a un caso dudoso, que resolvemos sustituyendo en la serie:

$$\sum a_n = \sum \frac{a}{n+a+1} = a \sum \frac{1}{n+a+1}$$

  que tiene el mismo carácter que $\sum \dfrac{1}{n}$, divergente ($a_n \sim a'_n$, ver **6.3**).

Así pues, la serie converge si $b > a+1$ y diverge en los demás casos.

Ejercicio. Estudia el carácter de la serie $\sum \dfrac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$.

Solución. Si $a > 2$, converge; Si $a \leq 2$, diverge.

6.7. Criterio logarítmico

a) Si $\forall m \geq n_0 \begin{cases} \dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m} \geq k > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} & \text{(a.1)} \\ \\ \dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m} \leq 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} & \text{(a.2)} \end{cases}$

b) Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = l \begin{cases} l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente} \\ l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es divergente} \\ l = 1 \Rightarrow \text{ dudoso, } \left(\text{si } \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \to 1^-, \text{ D}\right) \end{cases}$

Demostración. (a partir de la condición **a**)

a.1. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m} \geq k > 1$, entonces $\ln(1/a_m) \geq k \ln m = \ln m^k$.

Elevamos e a la expresión en ambos lados de la desigualdad, obteniendo $\dfrac{1}{a_m} \geq m^k$.

Despejando a_m, resulta $a_m \leq \dfrac{1}{m^k}$, $k > 1$, $\forall m \geq n_0$.

Entonces $\sum a_n$ es minorante de una serie de Riemann ($\alpha > 1 \Rightarrow$ convergente), luego converge.

a.2. Si $\forall m \geq n_0$, $\dfrac{\ln(1/a_m)}{\ln m} \leq 1$, entonces $\ln(1/a_m) \leq \ln m$.

Elevamos e a la expresión en ambos lados de la desigualdad, obteniendo $\dfrac{1}{a_m} \leq m$.

Despejando a_m, resulta $a_m \geq \dfrac{1}{m}$

Entonces $\sum a_n$ es mayorante de la armónica, luego diverge.

Nota. En este criterio, como en el de Raabe, la convergencia se obtiene para valores de l mayores que 1 y la divergencia para valores menores que 1.

Aplicación. Este criterio suele dar buen resultado cuando a_n contiene logaritmos.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series:

1. $\sum \dfrac{1}{2^{\ln n}}$. Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln 2^{\ln n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n \ln 2}{\ln n} = \ln 2 < 1 \Rightarrow$ D.

2. $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n > 1$. Calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(\ln n)^{\ln n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n \ln(\ln n)}{\ln n} =$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(\ln n) = \infty > 1 \Rightarrow$ C.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^q}$, $n > 1$ (D) ; $\sum \dfrac{1}{\ln(n^{\ln n})}$, $n > 1$ (D).

6.8. Criterio de condensación (comparación con $\sum 2^n a_{2^n}$)

Cada uno de los últimos cuatro criterios estudiados es especialmente adecuado en ciertos casos (término general con potencias n-ésimas, factoriales o logaritmos; o caso dudoso por D'Alembert). El criterio de condensación resuelve algunas series cuyo carácter resulta dudoso por los anteriores, por lo que generalmente no será el primer criterio que apliquemos.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión **monótona decreciente**, se cumple:

$$\boxed{\text{Las series } \sum a_n \text{ y } \sum 2^n a_{2^n} \text{ tienen el mismo carácter}}$$

Demostración. Vamos a encontrar una mayorante y una minorante de $\sum a_n$. Para ello tenemos en cuenta lo siguiente:

1. Al ser de términos positivos podemos agruparlos sin que varíe el carácter.
2. Como $\{a_n\}$ es monótona decreciente, se cumplirá $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \dots \\
\sum a_n &\geq a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + (a_{16} + \cdots + a_{16}) + \dots \\
\sum a_n &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + (a_8 + \cdots + a_8) + \dots
\end{aligned}$$

Agrupando los sumandos iguales en las expresiones anteriores, resulta

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots \leq \sum a_n \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \dots$$

es decir

$$\frac{1}{2} \sum 2^n a_{2^n} \leq \sum a_n \leq a_1 + \sum 2^n a_{2^n}$$

De estas desigualdades deducimos (por el criterio de la mayorante y la minorante):

1. Si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge, también lo hace $\sum a_n$ (minorante suya).
2. Si $\sum 2^n a_{2^n}$ diverge, también lo hace $\frac{1}{2} \sum 2^n a_{2^n}$, luego $\sum a_n$ diverge (mayorante suya).

Luego ambas series tienen el mismo carácter.

Nota. Para obtener el término general de la serie $\sum 2^n a_{2^n}$, sustituímos n por 2^n en la expresión de a_n y lo multiplicamos por el factor 2^n.

Ejemplos. Estudiamos el carácter de las siguientes series.

1. $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$. Analizamos $\sum 2^n \dfrac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum \dfrac{1}{n \ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} \sum \dfrac{1}{n}$, que es divergente.
2. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln(\ln n)}$. $\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \dfrac{1}{\sqrt{2^n} \ln(\ln 2^n)} = \sum \dfrac{\sqrt{2^n}}{\ln(n \ln 2)} = \sum \dfrac{(\sqrt{2})^n}{\ln n + \ln(\ln 2)}$,

   que diverge pues su término general tiende a ∞.

Ejercicios. Estudia el carácter de: $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ (D); $\quad \sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ (C).

7. Series de términos positivos y negativos

Hemos estudiado el carácter de las series de términos positivos. Para estudiar las que contienen términos negativos, distinguiremos los siguientes casos:

a) Si todos los términos de una serie son negativos, sacamos factor común el signo "$-$", con lo que se convierte en una serie de términos positivos, que podemos estudiar por los criterios vistos para este tipo de series.

b) Si sólo existe un número finito de términos negativos, no varían el carácter. Se pueden sumar aparte y estudiar la serie resultante de términos positivos (propiedad 1 de las series).

c) De igual modo, si los términos son negativos, excepto un número finito de términos positivos, sacamos factor común el signo menos y la convertimos en una serie de términos positivos, con un número finitos de negativos (caso b).

d) Así pues, **el único tipo de serie que plantea problemas nuevos es el de las que tienen infinitos términos de cada signo**. Para estudiarlo, daremos unas definiciones.

7.1. Convergencia y divergencia absoluta e incondicional

Dada una serie $\sum a_n$, diremos que es:

a) **Absolutamente convergente (divergente)** si y sólo si la serie $\sum |a_n|$, formada por los valores absolutos de los términos, es convergente (divergente).

b) **Incondicionalmente convergente o divergente** si y sólo si, al reordenar sus términos, no varía el carácter, ni la suma si es convergente.

   Si al reordenar términos varían el carácter o la suma, se dice que la serie es condicional.

Para estudiar el carácter de la serie $\sum a_n$ descompondremos su suma parcial

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

en las subseries positiva y negativa. Para ello, definimos:

$$a_i^+ = \begin{cases} a_i & a_i > 0 \\ 0 & a_i \leq 0 \end{cases}; \qquad a_i^- = \begin{cases} a_i & a_i < 0 \\ 0 & a_i \geq 0 \end{cases}$$

De este modo cada a_i puede escribirse como suma de $a_i^+ + a_i^-$. Esto lo hacemos para descomponer una suma de n términos en dos sumas de n términos, S_n^+ y S_n^-, en cada una de las cuales sustituímos por cero aquellos que no son del signo correspondiente.

Entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i^+ + a_i^-) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^+ + \sum_{i=1}^{n} a_i^- \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^+\right| - \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^-\right| \overset{(4)}{=} S_n^+ - S_n^-$$

donde hemos dado los siguientes pasos:

1. Descomponer $a_i = a_i^+ + a_i^-$.
2. Separar la suma de n pares de elementos en un par de sumas.
3. Tener en cuenta que $a_i^+ = \left|a_i^+\right|$ y $a_i^- = -\left|a_i^-\right|$
4. Llamar $S_n^{\pm}$ a las sumas de los $\left|a_i^{\pm}\right|$.

Una vez descompuesta S_n, observamos que las $S_n^{\pm}$, al no contener términos negativos, cumplen lo siguiente:

1. O convergen o divergen (no oscilan).
2. Son incondicionales (podemos reordenarlas sin que varíe el carácter ni la suma).

Existen las siguientes opciones: que ambas converjan, que diverja sólo una o que diverjan ambas. Así pues, tomando límites en cada caso, resulta

a) $S_n^+ \to S^+$ y $S_n^- \to S^- \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = S^+ - S^-$.

   La serie converge incondicionalmente a $S^+ - S^-$.

b) $S_n^+ \to +\infty$ y $S_n^- \to S^- \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = +\infty$.

   La serie diverge incondicionalmente a $+\infty$.

c) $S_n^+ \to S^+$ y $S_n^- \to +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = -\infty$.

   La serie diverge incondicionalmente a $-\infty$.

d) $S_n^+ \to \infty$ y $S_n^- \to \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n^+ - S_n^-\right) = ?$ (indet. $\infty - \infty$)

   La serie puede converger, diverger u oscilar (ver ejemplos más abajo).

Es decir, **sólo en el primer caso la serie converge incondicionalmente y sólo en los tres primeros el carácter es incondicional**.

Ejemplos del caso d. Se muestran a continuación tres series que se descomponen en subseries divergentes. En el primer caso, se trata de una serie alternada que converge por el teorema de Leibniz (**7.4**). En el segundo caso, tomando un número de términos tanto impar como par, las sumas parciales tienden a ∞ y la serie diverge. En el tercero, tomando un número par de términos, las sumas parciales son nulas; y, tomando un número impar, tienden a infinito, luego la serie oscila. Con esto se comprueba que la indeterminación $\infty - \infty$ en la descomposición $S_n^+ - S_n^-$ puede producir distintos resultados.

1) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} \ldots \longrightarrow \ln 2\,, \qquad \text{siendo} \begin{cases} S_n^+ = 1 + 1/3 + 1/5 + \ldots \\ \\ S_n^- = 1/2 + 1/4 + 1/6 + \ldots \end{cases}$

2) $1 - 1 + 2 - \dfrac{1}{2} + 3 - \dfrac{1}{3} + \ldots \longrightarrow \infty\,, \qquad \text{siendo} \begin{cases} S_n^+ = 1 + 2 + 3 + \ldots \\ \\ S_n^- = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots \end{cases}$

3) $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots \longrightarrow \begin{cases} \infty \\ \\ 0\;, \end{cases}$ siendo ambas subseries $1 + 2 + 3 + \ldots$

Ejercicio. Encuentra tres series, convergente, divergente y oscilante, cuyas subseries positiva y negativa sean divergentes.

7.2. Teorema de Riemann

Como acabamos de ver, si las dos subseries divergen, la serie resultante puede tener cualquier carácter. El siguiente teorema muestra que, reordenando sus términos, podemos lograr que diverja, oscile o converja a la suma que queramos.

Teorema: *Sea* $\sum a_n$*, tal que las subseries positiva y negativa* $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ *son divergentes y se cumple que* $a_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*. Reordenando sus términos podemos conseguir que diverja, oscile o converja a cualquier suma.*

Demostración.

a) Divergente. Para formar la serie reordenada procedemos de la siguiente manera:

- Tomamos términos positivos, en el orden inicial, hasta superar el doble del valor absoluto del primer término negativo. Escribimos a continuación el primero negativo.
- Luego tomamos términos positivos, en el orden inicial, hasta superar el doble del valor absoluto del segundo término negativo. A continuación el segundo negativo.
- Y así sucesivamente...

El proceso se puede repetir indefinidamente, pues la subserie positiva diverge, luego los grupos de términos positivos que vamos tomando pueden superar cualquier valor. Resulta:

$$\sum a'_n = \underbrace{a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_\alpha^+}_{\geq 2\left|a_1^-\right|} - \left|a_1^-\right| + \underbrace{a_{\alpha+1}^+ + \cdots + a_{\alpha+\beta}^+}_{\geq 2\left|a_2^-\right|} - \left|a_2^-\right| + \cdots \geq \left|a_1^-\right| + \left|a_2^-\right| + \ldots$$

De este modo la serie reordenada es mayorante de una divergente, luego diverge.

b) Oscilante. Elegimos $k_1, k_2 \,/\, k_1 < k_2$. Manteniendo siempre el orden inicial:

- Tomamos términos positivos hasta que su suma supere k_2. A continuación términos negativos hasta que la suma total sea inferior a k_1.
- Tomamos más términos positivos hasta que la suma total supere de nuevo k_2. Y términos negativos hasta que la suma total vuelva a ser inferior a k_1.
- Y así sucesivamente...

En cada ciclo, el valor absoluto de la diferencia entre la suma parcial y el correspondiente valor k_1 o k_2 es menor o igual que el valor absoluto del último término añadido. Al ser $a_n \to 0$, las sumas parciales pueden acercarse a k_1 o k_2 tanto como queramos, por lo que la serie así reordenada es oscilante.

c) Convergente. Elegimos el valor S deseado para la suma. Manteniendo el orden inicial:

- Tomamos términos positivos hasta superar el valor S. A continuación, términos negativos hasta que la suma total sea inferior a S.
- De nuevo términos positivos hasta quedar a la superar S y a continuación términos negativos hasta que la suma total sea inferior a S.
- Y así sucesivamente...

En cada ciclo, el valor absoluto de la diferencia entre la suma parcial y el valor S es menor o igual que el valor absoluto del último término añadido. Como $a_n \to 0$, las sumas parciales pueden acercarse a S tanto como queramos, luego la serie reordenada converge a S.

Nota. Obsérvese que en el primer caso no hemos utilizado la condición $a_n \longrightarrow 0$.

7.3. Teorema de Dirichlet

$\sum a_n$ *es incondicionalmente convergente si y sólo si es absolutamente convergente.*

Demostración. Para demostrar el teorema veremos que, tanto la convergencia incondicional de la serie como la absoluta, equivalen a la convergencia de las subseries de términos positivos $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$.

a) **Convergencia incondicional**: En el apdo. **7.1** estudiamos la convergencia incondicional de una serie de términos positivos y negativos, analizando las cuatro posibilidades para el carácter de las subseries.

Concluimos entonces que la serie es incondicionalmente convergente si $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ son convergentes y **sólo en ese caso**.

b) **Convergencia absoluta**: La serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ será convergente si y sólo si lo son $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$. En efecto, descomponiendo el término general $|a_i|$, la serie se convierte en la suma de dos subseries:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} \left(|a_i^+| + |a_i^-|\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_i^+| + \sum_{i=1}^{n} |a_i^-|$$

Entonces, al ser ambos sumandos series de términos positivos,

- Si $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ convergen, $\sum |a_n|$ converge a la suma de ambas.
- Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum |a_n^+|$ y $\sum |a_n^-|$ deben converger. De lo contrario, alguna de las dos sería divergente y $\sum |a_n|$ sería entonces divergente, contra la hipótesis.

Aplicación. Así pues, el teorema nos indica el **primer paso que debemos dar** para estudiar el carácter de una serie de términos positivos y negativos: analizar la serie $\sum |a_n|$.

a) Si $\sum |a_n|$ converge, $\sum a_n$ será incondicionalmente convergente, por lo que podemos reordenarla, descomponerla en las subseries positiva y negativa, etc.

b) Si $\sum |a_n|$ diverge, comprobamos si sólo una de las dos subseries lo hace, en cuyo caso $\sum a_n$ será incondicionalmente divergente.

c) Si, además de $\sum |a_n|$, ambas subseries divergen, sólo nos queda estudiar una suma parcial S_n o aplicar el Teorema de Leibnitz, si se cumplen ciertas condiciones (apdo. **7.4**).

En este caso de subseries divergentes, si además $a_n \to 0$, la serie puede converger, diverger u oscilar según el orden que demos a sus términos (teorema de Riemann). Por ello hemos de estudiarla en el orden dado en el enunciado.

Nota. El teorema establece la equivalencia entre la convergencia absoluta y la incondicional, mientras que no afirma nada sobre la divergencia absoluta. En el apartado siguiente veremos ejemplos de series absolutamente divergentes pero condicionalmente convergentes.

Ejercicio. Demuestra por reducción al absurdo que, *si* $\sum a_n$ *es incondicionalmente divergente, entonces es absolutamente divergente.*

7.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz

Llamamos **alternadas** a las series cuyos términos cambian de signo alternativamente. Vamos a estudiar un tipo particular, aquellas en las que el valor absoluto de los términos es decreciente. Escribimos una suma parcial S_n:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n \, ; \; a_n > 0, \forall n; \; \{a_n\} \text{ monótona decreciente}$$

Para el estudio de la convergencia de estas series es de gran utilidad el siguiente teorema:

Teorema de Leibnitz. *Toda serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto, tal que su término general tiende a cero, es convergente.*

Nota. Se demuestra que la suma de la serie está entre dos sumas parciales consecutivas cualesquiera. Por ello, al tomar como suma S el valor de una suma parcial S_n, el error cometido es menor o igual que el valor absoluto del primer término despreciado, es decir a_{n+1}.

Ejemplo 1. La serie alternada suma de los inversos de los pares:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots \quad \Big(\text{de suma } S = \frac{1}{2} \ln 2\Big)$$

Ejemplo 2. La serie alternada suma de los inversos de los impares:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \Big(\text{de suma } S = \frac{\pi}{4}\Big)$$

Ejemplo 3. Cálculo de la constante de Euler γ. Para ello, estudiamos la convergencia de la serie alternada siguiente.

$$\sum a_n = 1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ldots$$

Comprobamos que se cumplen las condiciones del teorema:

a) Decrece en valor absoluto. La sucesión $\big(1 + 1/n\big)^n$ es monótona creciente de límite e, mientras que $\big(1+1/n\big)^{n+1}$ es monótona decreciente, con el mismo límite. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumplirá

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \overset{\ln}{\Longrightarrow} (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 > n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \;\text{ y }\; \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}}$$

b) El término general tiende a 0, pues sus dos expresiones lo hacen:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Como consecuencia, la serie $\sum a_n$ converge. Llamamos γ (constante de Euler) a su suma. El teorema nos asegura que podemos calcular γ con la precisión deseada, siempre que sumemos un número suficiente de términos. Su valor resulta $\gamma = 0.577215\ldots$

Aplicación. Suma de los n primeros términos de la serie armónica.

La serie armónica es divergente. Para obtener el valor de la suma de sus n primeros términos, hacemos lo siguiente: **1)** tomamos los $2n$ primeros sumandos de la serie del Ejemplo 3; **2)** agrupamos por separado los términos positivos y los negativos; **3)** denotamos la suma de los n primeros positivos como H_n y **4)** incluimos los negativos en un solo neperiano y simplificamos, es decir

$$S_{2n} = 1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{H_n} - \underbrace{\ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdots\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)}_{\ln(n+1)}$$

Como vimos en el Ejemplo 3, esta serie tiene como suma la constante γ, por lo que su suma parcial S_{2n} será igual al valor de su límite γ más un infinitésimo θ_n. Por otra parte, como acabamos de ver, S_{2n} puede escribirse como diferencia de H_n y $\ln(n+1)$. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \gamma \Longrightarrow S_{2n} = \gamma + \theta_n = H_n - \ln(n+1)$$

Despejando H_n,

$$H_n = \ln(n+1) + \gamma + \theta_n = \ln\frac{n+1}{n}\,n + \gamma + \theta_n = \underbrace{\ln\frac{n+1}{n}}_{\theta'_n} + \ln n + \gamma + \theta_n = \ln n + \gamma + \theta_n + \theta'_n$$

Agrupando θ_n y θ'_n en un único infinitésimo ε_n, obtenemos el valor de la suma de los n primeros sumandos de la serie armónica

$$\boxed{H_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \gamma + \varepsilon_n}$$

Esta expresión nos dice que H_n es un infinito equivalente a $\ln n$ y nos resultará útil para sumar algunos tipos de series (apdo. **8.2**) y resolver límites formados por un número de sumandos que tiende a ∞, como veremos a continuación.

Ejemplo 1. Calcula $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

Observamos que los denominadores están formados por los números naturales consecutivos desde $n+1$ hasta $2n$, por lo que la suma se puede escribir como diferencia de H_{2n} y H_n. Entonces,

$$L = \lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\underbrace{\ln 2n}_{\ln 2 + \ln n} + \gamma + \varepsilon_{2n} - [\ln n + \gamma + \varepsilon_n]\big) = \lim_{n\to\infty}(\ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = \ln 2$$

Ejemplo 2. Calcula $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$.

Ahora los denominadores son los números naturales consecutivos desde $n+1$ hasta n^2, por lo que el paréntesis se puede escribir como diferencia de H_{n^2} y H_n. Resulta

$$L = \lim_{n\to\infty}(H_{n^2} - H_n) = \lim_{n\to\infty}\big(\ln(n^2) + \gamma + \varepsilon'_n - [\ln n + \gamma + \varepsilon_n]\big) = \lim_{n\to\infty}(\ln n + \varepsilon'_n - \varepsilon_n) = \infty$$

Ejercicio 1. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$ $(L = \ln 3)$.

Ejercicio 2. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right)$ $(L = \infty)$.

8. Métodos de suma de series

En este apartado estudiaremos distintos métodos prácticos para sumar algunas series.

8.1. Por descomposición

Aplicamos este método a las series cuyo término general se puede descomponer en suma de otros, que con frecuencia son fracciones simples. Consiste en tomar una suma parcial, descomponer sus términos y, tras simplificar la expresión resultante de S_n, calcular su límite.

a. Series telescópicas. Son un caso particular de series, en las que a_n se descompone como

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

De este modo, S_n se convierte en

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1}) = b_1 - \cancel{b_2} + \cancel{b_2} - \cancel{b_3} + \cdots + \cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n} + \cancel{b_n} - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

con lo que

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}}$$

Ejemplo 1. Halla $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$. Vemos que $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, convergente (Riemann, $\alpha > 1$).

Descomponemos el término general: $a_n = \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

luego es una serie telescópica. Simplificamos S_n

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots - \cancel{\frac{1}{n-1}} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Calculamos la suma

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n^2+2n}}$. El término general se descompone en

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

luego es telescópica. Operando como en el ejemplo 1, obtenemos $S = 1/\sqrt{2}$.

Nota. Para estudiar la convergencia de la serie, podemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador, $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$. Obtenemos un infinitésimo equivalente a a_n

$$a'_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{n^{3/2}}$$

que corresponde a una serie convergente (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$). Si el enunciado no lo pide y sólo queremos obtener la suma, no es imprescindible hacer esto, pues al calcular el límite de S_n sabremos si converge o no.

Ejercicio. Suma: **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2(n+1)^2}$ $(S = 2)$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{n^2-n}}$ $(S = \sqrt{3})$.

b. Descomposición en fracciones simples. Si el término general está formado por un cociente de polinomios

$$a_n = \frac{P_k(n)}{Q_l(n)}, \quad k < l$$

se descompone en fracciones simples y se simplifica S_n. Veremos ejemplos de dos de los casos más habituales.

Ejemplo 1. Obtener $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n}$. Descomponemos a_n, identificando los coeficientes:

$$a_n = \frac{n-2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} \Longrightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = 2,\ C = -\frac{3}{2}$$

Observamos que los coeficientes suman 0 pues, al ser el grado del numerador igual a 1, es nulo el coeficiente de n^2, es decir $A+B+C$.

Calculamos ahora S_n, descomponiendo la suma de los a_i en tres sumas distintas. Para facilitar la simplificación, llamamos H_n a

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Entonces

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{1/2}{i-1} + \frac{2}{i} - \frac{3/2}{i+1} \right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} + 2\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\cancel{H_n} - \frac{1}{n}\right) + 2\left(\cancel{H_n} - 1\right) - \frac{3}{2}\left(\cancel{H_n} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n} - 2 + \frac{9}{4} - \frac{3/2}{n+1}$$

Tomando límites, obtenemos $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1/4$.

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n^2}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Descomponemos a_n, separando en dos partes los tres términos resultantes:

$$a_n = \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n-1} = \cdots = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n-1} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}$$

Calculamos S_n y tomamos límites

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - 1\right) =$$

$$1 - \frac{1}{n} + 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \Longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Ejercicio. Suma: **a)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-n}$ $(S = 5/4)$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$ $(S = \dfrac{\pi^2}{6} - 1)$.

8.2. A partir de la armónica

La serie armónica es divergente, pero a partir de ella podemos sumar distintas series de términos positivos y negativos. Para ello utilizamos la suma de sus n primeros términos, cuyo valor (apdo. **7.4**) es

$$\boxed{H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n}$$

Entonces la suma de los $2n$ primeros términos, H_{2n}, será

$$H_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}$$

Llamamos P_n a la suma de los n primeros inversos de los pares

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}H_n \Longrightarrow \boxed{P_n = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon'_n}$$

I_n es la suma de los n primeros inversos de los impares. Para calcular su valor, tomamos los $2n$ primeros términos de la armónica y eliminamos los n primeros inversos de los pares (P_n)

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = H_{2n} - P_n = \ln 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \left[\frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon'_n\right] =$$
$$\ln 2 + (\ln n + \gamma) + \varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - \varepsilon'_n \Longrightarrow \boxed{I_n = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon''_n}$$

Así pues, tanto H_n como I_n y P_n son divergentes. Obsérvese que el subíndice indica número de términos, mientras que el tipo (inversos de naturales, impares, pares) viene dada por H, I o P.

Ejemplo 1. Hallamos la suma de la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Tomamos $2n$ términos de la serie, de los que n serán de I_n y los otros n de P_n:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$
$$I_n - P_n = \ln 2 + \cancel{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma)} + \varepsilon''_n - \cancel{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma)} - \varepsilon'_n \Longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$$

Ejemplo 2. Calculamos la suma de $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$

Vemos que los términos siguen una cierta ley, que se repite de tres en tres. Entonces tomamos $3n$ términos, es decir, n grupos de 3. En cada uno hay un inverso de impar (+) y dos inversos de pares (−), por lo que en total habrá n impares y $2n$ pares, consecutivos. Así pues:

$$S_{3n} = I_n - P_{2n} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(\ln 2n + \gamma) - \varepsilon_2 \Longrightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Ejercicio. Suma: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (S = \frac{3}{2}\ln 2)$

8.3. A partir del desarrollo en serie de e^x

La suma de $\sum \dfrac{P_k(n)}{n!}\,\alpha^n$, donde $P_k(n)$ es un polinomio de grado k y $\alpha \in \mathbb{R}$, se calcula a partir del desarrollo en serie de e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

que se estudiará en el tema siguiente y aquí suponemos conocido.

Carácter. El parámetro α puede ser negativo, por lo que estudiamos $|a_n|$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_k(n+1)\,\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{P_k(n)\,\alpha^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_k(n+1)}{P_k(n)}\,\frac{\alpha}{n+1}\right| = 0 < 1$$

luego $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la convergencia es absoluta, por lo tanto incondicional (T. Dirichlet).

Suma. Para simplificar numerador y denominador, escribimos $P_k(n)$ del siguiente modo

$$P_k(n) = A_0 + A_1\,n + A_2\,n(n-1) + \dots + A_k\,n(n-1)\cdots\big[n-(k-1)\big]$$

cuyo último sumando -con k factores- tiene grado k. A continuación descomponemos el término general en $k+1$ sumandos, con lo que la serie se convierte en una combinación lineal de series convergentes, que sumaremos utilizando el desarrollo de la función e^x.
En el caso de que el denominador no sea el factorial de n, sino el de $n \pm p$, el polinomio $P_k(n)$ se descompondrá en una combinación lineal de productos de factores decrecientes a partir de $n \pm p$.

Ejemplo. Hallamos la suma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{n!}\,2^n$.
Descomponemos $P_2(n)$: $2n^2+n+1 = A + Bn + Cn(n-1) \Longrightarrow A = 1,\ B = 3,\ C = 2$. Entonces

$$a_n = \frac{1+3n+2n(n-1)}{n!}\,2^n = \frac{1}{n!}\,2^n + \frac{3n}{n!}\,2^n + \frac{2n(n-1)}{n!}\,2^n$$

con lo que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!} + 3\sum_{i=0}^{n} \frac{i\,2^i}{i!} + 2\sum_{i=0}^{n} \frac{i(i-1)\,2^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!} + 3\sum_{i=1}^{n} \frac{i\,2^i}{i!} + 2\sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)\,2^i}{i!}$$

(los sumandos de numerador nulo se han eliminado en el segundo y tercer sumatorios).
Simplificando los factores del numerador con los factoriales, queda

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!} + 3\cdot 2\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{(i-1)!} + 2\cdot 2^2\sum_{i=2}^{n} \frac{2^{i-2}}{(i-2)!}$$

donde los tres sumatorios tienen los mismos términos, $\dfrac{2^0}{0!}+\dfrac{2^1}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\cdots$, y tienden a e^2. Así pues

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} + 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{(i-1)!} + 8\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{i-2}}{(i-2)!} = e^2 + 6\,e^2 + 8\,e^2 = 15\,e^2$$

Ejercicio. Calcula **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}$ $\quad (S = 4\,e - 1)$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{(n+2)!}3^n$ $\quad (S = e^3 - 2)$

8.4. Series hipergeométricas

Definición. Una serie es hipergeométrica si su término general cumple la condición:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha\, n + \beta}{\alpha\, n + \gamma}}\ (\alpha > 0, \gamma \neq 0)$$

Carácter. Lo estudiamos aplicando el criterio de Raabe.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\alpha\, n + \beta}{\alpha\, n + \gamma}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha\, n + \gamma}\right) = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}$$

- Si $\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha} > 1 \Longrightarrow \boxed{\alpha + \beta < \gamma}$, la serie es convergente.

- Si $\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha} < 1 \Longrightarrow \boxed{\alpha + \beta > \gamma}$, la serie es divergente.

- Si $\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha} = 1 \Longrightarrow \boxed{\alpha + \beta = \gamma}$, tenemos un caso dudoso (como veremos al final, diverge).

Suma. Si $\alpha + \beta < \gamma$, obtenemos la suma a partir de la condición de hipergeométrica

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\alpha\, i + \beta}{\alpha\, i + \gamma} \Longrightarrow a_{i+1}\,(\alpha\, i + \gamma) = a_i\,(\alpha\, i + \beta)\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Dando valores a i:

$$\begin{array}{ll}
i = 1: & a_2\,(1\cdot\alpha + \gamma) = a_1\,(1\cdot\alpha + \beta) \\
i = 2: & a_3\,(2\cdot\alpha + \gamma) = a_2\,(2\cdot\alpha + \beta) \\
i = 3: & a_4\,(3\cdot\alpha + \gamma) = a_3\,(3\cdot\alpha + \beta) \\
\vdots & \qquad\qquad\vdots \\
i = n-1: & a_n\big((n-1)\alpha + \gamma\big) = a_{n-1}\,\big((n-1)\alpha + \beta\big) \\
 & a_n\,(n\alpha + \beta) \qquad = a_n\,(n\alpha + \beta) \quad \text{(añadimos una identidad)}
\end{array}$$

Simplificamos los α en ambos lados y sumamos las igualdades que resultan. Llamando S_n a la suma de los n primeros términos, obtenemos:

$$(S_n - a_1)\,\gamma + a_n(n\alpha + \beta) = S_n(\alpha + \beta) \Longrightarrow$$

$$S_n\big[\gamma - (\alpha + \beta)\big] = a_1\gamma - a_n(n\alpha + \beta) \Longrightarrow \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1\gamma}{\gamma - (\alpha + \beta)} - \underbrace{\frac{a_n(n\alpha + \beta)}{\gamma - (\alpha + \beta)}}_{b_n} \qquad \big(\gamma - (\alpha + \beta) \neq 0\big) \qquad (2)$$

Como suponemos que $\alpha + \beta < \gamma$, la serie converge, luego

$$\exists\, S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1\gamma}{\gamma - (\alpha + \beta)} - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Al existir S, debe existir el $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Veamos que es nulo por reducción al absurdo.

Supongamos que el límite de b_n no es nulo. Operando a partir de (2) obtenemos para b_n la expresión

$$b_n = \frac{a_n(n\alpha+\beta)}{\gamma-(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\gamma-(\alpha+\beta)}\left(a_n : \frac{1}{n\alpha+\beta}\right)$$

y tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{\gamma-(\alpha+\beta)}\lim_{n\to\infty}\left(a_n : \frac{1}{n\alpha+\beta}\right) = k \neq 0$$

Puesto que la serie

$$\sum \frac{1}{n\alpha+\beta}$$

diverge por comparación con la armónica, $\sum a_n$ sería también divergente (ver **6.3**), contra la hipótesis.

Así pues, $b_n \to 0$ y la suma de la serie vale

$$\boxed{S = \frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)}} \quad (\text{si } \alpha+\beta<\gamma)$$

Caso dudoso. Para resolver el caso $\alpha+\beta=\gamma$, consideramos la igualdad (1) de la página anterior. El miembro izquierdo es nulo y despejando a_n, obtenemos

$$0 = a_1\gamma - a_n(n\alpha+\beta) \Longrightarrow a_n = a_1\gamma\,\frac{1}{n\alpha+\beta}$$

que corresponde a una serie divergente.

Ejemplo. Calculamos la suma de la serie siguiente, cuyo carácter se estudió en el apdo. **6.6**.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$$

Simplificando el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{a+n+1}{b+n+1} = \frac{n+a+1}{n+b+1}$$

vemos que la serie es hipergeométrica, con

$$\alpha = 1,\ \beta = a+1,\ \gamma = b+1$$

Como acabamos de ver, esta serie será convergente si

$$\gamma > \alpha+\beta \Longleftrightarrow b > a+1$$

Para calcular la suma, obtenemos previamente a_1 y sustituímos en la fórmula de S.

$$a_1 = \frac{a\,(a+1)}{b\,(b+1)} \Longrightarrow S = \frac{a_1\gamma}{\gamma-(\alpha+\beta)} = \frac{a\,(a+1)}{b\,(b+1)}\,\frac{b+1}{b+1-(a+2)} = \frac{a\,(a+1)}{b\,(b-a-1)}$$

Ejercicio 1. Calcula las sumas de las siguientes series, comprobando antes que son hipergeométricas (pueden resolverse también como telescópicas).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)} \quad \left(S = \frac{1}{4}\right)$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \left(S = \frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 2. Estudia el carácter y la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \quad \left(\text{Converge si } a>2;\ S = \frac{1}{a-2}\right)$$

8.5. Carácter y suma de series. Resumen

Para finalizar este apartado, se muestran a continuación los principales pasos que conviene dar en el estudio del carácter y suma de una serie.

Series de términos positivos. Si se trata de una S.T.P., aplicamos alguno de los criterios estudiados, teniendo en cuenta su mayor o menor adecuación al tipo de serie de que se trate. Para sumarla, si converge, podemos reordenar sus términos, agruparlos o descomponerlos en suma de términos positivos, pues no cambia la suma (propiedades **3**, **6** y **7** de las series).

Series de términos positivos y negativos. Si la serie tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, el primer paso será estudiar la serie $\sum |a_n|$, con lo que obtenemos dos posibles resultados:

a) **Convergente**. Al ser la serie absolutamente convergente, es incondicionalmente convergente (Dirichlet), lo que nos permite reordenar o agrupar sus términos, p. ej. separando positivos de negativos.

b) **Divergente**. Si sólo diverge una de las dos subseries (la positiva o la negativa), la serie diverge incondicionalmente a $\pm\infty$ (apdo. **7.1**). Si divergen ambas (será lo más frecuente), distinguimos dos casos:

b.1. Si se trata de una alternada, aplicamos el teorema de Leibnitz.

b.2. De lo contrario, recurrimos al método general: tomamos una suma parcial S_n (donde podemos agrupar, simplificar, etc.) y estudiamos su límite.

Nota. En estos dos casos, si existe convergencia, es condicional (se cumple para la ordenación de términos dada, pero puede no verificarse para otras).

Caso particular. Series convergentes que se descomponen en S.T.P.N. En ocasiones, para sumar una serie absolutamente convergente, descomponemos su término general a_n en sumas o diferencias de términos $(b_n \pm c_n \pm \dots)$. Al hacer esto (descomposición en términos positivos y negativos), la serie resultante ya no tiene por qué ser absolutamente convergente y tenemos dos posibilidades.

a) Si los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponden a **series convergentes**, aplicamos la propiedad **5** ("*la c.l. de series convergentes converge a la c.l. de las sumas de las series*"). Como la serie $\sum a_n$ es combinación lineal de $\sum b_n, \sum c_n \dots$, su suma valdrá $S_b \pm S_c \pm \dots$, siendo $S_b, S_c, \dots$ las sumas de las series $\sum b_n, \sum c_n, \dots$, respectivamente.

b) Si **dos o más** de los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponden a **series divergentes**, debemos analizar S_n, aplicando alguno de los métodos estudiados: telescópicas, descomposición en fracciones, series I_n y P_n, etc. En cualquier caso, no podemos sumar por separado las distintas subseries $\sum b_n, \sum c_n, \dots$.

Ejemplo: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (S.T.P.) converge por comparación con $\sum \frac{1}{n^2}$. Para sumarla, se descompone su término general en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (diferencia de términos generales de series divergentes). Puede calcularse su suma como serie telescópica o bien a partir de la suma de n términos de la armónica.

Ejercicio. Hemos distinguido las posibilidades **a)** (todas convergentes) y **b)** (dos o mas divergentes). Razónese que no puede ocurrir que **sólo uno** de los términos $b_n, c_n, \dots$ corresponda a una serie divergente.

9. Ejercicios de autoevaluación

9.1. Test verdadero/falso

Test 1. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ es una suma parcial de $\sum a_n$. La serie diverge si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$.

2. Una serie geométrica converge siempre que la razón sea menor que 1.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie es divergente.

4. En una serie de términos positivos podemos agrupar términos sin que varíe el carácter.

5. Si una serie converge, la suma de un número cualquiera de términos consecutivos, a partir de uno dado p, tiende a cero si $p \to \infty$.

6. Si una serie no tiene términos negativos, sólo puede converger o diverger.

7. Decimos que $\sum a_n$ es minorante de $\sum b_n$ si y sólo si $a_n < b_n$, $\forall n$.

8. La serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$ cumple $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, por lo que converge.

9. La serie $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ es convergente, pues el exponente de n es $\alpha = 2 > 1$.

10. La serie $\sum 3^n/n^3$ cumple la condición necesaria de convergencia, pero resulta divergente por el criterio de la raíz.

11. Si existe el límite del criterio del cociente existe el de la raíz n-ésima y coinciden.

12. Si el criterio de D'Alembert no soluciona el carácter de una serie, no tiene sentido aplicar el de Raabe y es preferible, en general, usar el de Cauchy.

13. Para conocer el carácter de $\sum \dfrac{1}{e^{2\ln n}}$ es necesario aplicar el criterio logarítmico.

14. Según el criterio de condensación, las series $\sum a_n$ y $\sum 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

15. .- Averigua el carácter de las series siguientes:

    15.1. $\sum \dfrac{1}{\alpha^n}$, $\alpha > 1$

    15.2. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$

    15.3. $\sum \dfrac{1}{\ln n}$

    15.4. $\sum \dfrac{1}{n + \ln n}$

    15.5. $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}}$

    15.6. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

Test 2. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Sea la serie $\sum a_n$. Sea la suma parcial $S_n = \sum_1^n a_i = \sum_1^n \left|a_i^+\right| - \sum_1^n \left|a_i^-\right| = S_n^+ - S_n^-$. $\sum a_n$ converge incondicionalmente si y sólo si convergen S_n^+ y S_n^-.

2. Si $\sum a_n$ es absolutamente divergente, entonces es incondicionalmente divergente.

3. La serie $\sum (-1)^{n+1}/\ln n,\ n > 1$ es absolutamente divergente, luego no podemos asegurar nada de su carácter.

4. Las series de término general $\dfrac{P_k(n)}{Q_k(n)}$ son convergentes y pueden sumarse por descomposición en fracciones simples.

5. Para sumar $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{17} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{6} \dots$ calcularemos el límite de la suma parcial de $4n$ términos, que resulta igual al de $I_{3n} - P_n$.

6. Para sumar $\sum \dfrac{P_3(n)}{(n+3)!}$, hemos de realizar la descomposición:

$$P_3(n) = A + B(n+3) + C(n+3)(n+2) + D(n+3)(n+2)(n+1)$$

7. Averigua razonadamente el carácter de las series siguientes y, si es posible, su suma:

   7.1. $\sum \dfrac{-1}{n}$

   7.2. $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$

   7.3. $-1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{12} - \dots$

   7.4. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} - \dots$

9.2. Cuestión

Sea la serie $\sum a_n$ de términos positivos. ¿Qué sabemos –y por qué– de su carácter (convergente, divergente, oscilante, condicional, incondicional)?

9.3. Solución de los test verdadero/falso

Test 1.

1. **F**. La serie diverge si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \infty$.

2. **F**. Una serie geométrica converge si el **valor absoluto** de la razón es menor que 1.

3. **F**. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie no converge, luego puede ser divergente u oscilante.

4. **V**. Propiedad 7 de las series.

5. **V**. Criterio de convergencia de Cauchy.

6. **V**. Las series de términos positivos nunca oscilan.

7. **F**. Decimos que $\sum a_n$ es minorante de $\sum b_n$ si y sólo si $a_n < b_n$, $\boxed{\forall n \geq n_1}$.

8. **F**. La condición $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria para la convergencia, no suficiente.

9. **F**. La condición $\alpha > 1$ es para la serie de Riemann. En este caso, $a_n \sim 1/n$, por lo que la serie tiene el mismo carácter que la armónica, luego diverge.

10. **F**. La serie $\sum 3^n/n^3$ NO cumple la condición necesaria de convergencia ($a_n \to 0$), aunque es cierto que resulta divergente por el criterio de la raíz.

11. **V**. A partir de la "regla de la raíz".

12. **F**. El criterio de D'Alambert es especialmente adecuado para solucionar casos que resultan dudosos por el criterio del cociente.

13. **F**. Basta ver que $a_n = \dfrac{1}{e^{\ln(n^2)}} = \dfrac{1}{n^2}$ (serie de Riemann, $\alpha = 2 > 1$, convergente)

14. **F**. **Si $\{a_n\}$ es monótona decreciente**, las series $\sum a_n$ y $\sum 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

15. Averigua el carácter de las series siguientes:

    15.1. $\sum \dfrac{1}{\alpha^n}$, $\alpha > 1$: **C**, serie geométrica de razón $\dfrac{1}{\alpha} < 1$.

    15.2. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$: **C**, serie de Riemann, $\alpha > 1$.

    15.3. $\sum \dfrac{1}{\ln n}$: **D**, mayorante de la armónica.

    15.4. $\sum \dfrac{1}{n + \ln n}$: **D**, $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, mismo carácter que la armónica.

    15.5. $\sum \dfrac{1}{3^{\ln n}}$: **C**, por el criterio logarítmico.

    15.6. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{2^n}} = \sum \dfrac{1}{2^{n/2}} = \sum \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\,\right)^n}$: **C**, por el criterio de la raíz.

Test 2.

1. **V**. Ver apdo. **7.1**.

2. **F**. Por ejemplo, la armónica alternada $\sum (-1)^{n+1}/n$ es absolutamente divergente. Pero converge (condicionalmente) a $\ln 2$. En cambio, a partir del teorema de Dirichlet se demuestra que, si una serie es incondicionalmente divergente, es absolutamente divergente.

3. **F**. Es alternada, de términos decrecientes en valor absoluto y $a_n \to 0$. El Teorema de Leibnitz asegura que converge en el orden dado, es decir, condicionalmente.

4. **F**. Si numerador y denominador tienen el mismo grado, el término general no tiende a cero, luego la serie no converge.

5. **V**. Calcularemos el límite de la suma parcial de 4n términos. En cada grupo de 4 términos habrá 3 positivos (inversos de los impares) y uno negativo (inverso de un par), por lo que en S_{4n} habrá $3n$ positivos (inversos de los impares) y n negativos (inverso de los pares). Se cumplirá: $S_{4n} = I_{3n} - P_n$ y, simplificando y tomando límites, obtendremos para la suma el valor $S = \ln(2\sqrt{3})$.

6. **V**. Ver apdo. **8.3**.

7. Averigua el carácter de las series siguientes, y si es posible su suma, justificándolo brevemente:

7.1. $\sum \dfrac{-1}{n}$: se trata de la armónica cambiada de signo, por lo que diverge a $-\infty$.

7.2. $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$: Es telescópica, pues $a_n = b_n - b_{n+1}$. Su suma n-ésima

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

La serie converge (en el orden dado en el enunciado).

7.3. $-1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{12} - \ldots$:

Tomamos una suma parcial de $3n$ términos. En cada grupo de 3 términos habrá uno negativo y dos positivos. Los denominadores de los términos negativos son los impares consecutivos, mientras que los denominadores de los positivos son los pares consecutivos. Entonces, en S_{3n} habrá n inversos de los impares, negativos, y $2n$ inversos de los pares, positivos. Se cumplirá: $S_{3n} = -I_n + P_{2n}$ y obtendremos para la suma el valor $S = -\ln\sqrt{2}$.

7.4. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} \ldots$: Se trata de una serie geométrica de razón $r = -1/3$, $|r| < 1$, por lo que es convergente. Su suma vale $S = \dfrac{a_1}{1-r} = 3/4$.

9.4. Solución de la cuestión

Si $\sum a_n$ es de términos positivos ($a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$), la sucesión de sumas parciales

$$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ \ldots\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n;\ \ldots$$

verifica

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots$$

es decir, será monótona creciente. Si está acotada, la serie será **convergente** (toda sucesión monótona creciente, acotada superiormente, converge). De lo contrario, será **divergente** a $+\infty$. Es decir, una serie de términos positivos nunca es oscilante.

La propiedad 6 de las series dice que "si alteramos el orden de los términos de una serie de términos positivos no varía el carácter, ni la suma si es convergente". Esto significa que el carácter de las series de términos positivos es siempre **incondicional**.

Podemos pues afirmar que el carácter de la serie $\sum a_n$ sólo puede ser incondicionalmente convergente o incondicionalmente divergente.

Tema IV. Sucesiones y series funcionales (17.04.2024)

1. Sucesiones funcionales

1.1. Distancia entre funciones

Llamamos $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$ al conjunto de funciones reales acotadas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dadas $f, g \in \mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$, definimos la **distancia** entre ellas como

$$\boxed{d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)|\,,\ x \in I}$$

es decir, el supremo de las distancias punto a punto entre f y g, cuando x toma valores en I. Con esta definición de distancia, se comprueba que $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$ es espacio métrico.

Ejemplo 1. $f(x) = a + x$ y $g(x) = b + x$ tienen entre sí una distancia $d(f,g) = |a - b|$.

Ejemplo 2. Las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ cumplen:

$$|f(x) - g(x)| = \frac{3}{1+x^2} \Longrightarrow d(f,g) = \sup \left.\frac{3}{1+x^2}\right|_{x\in\mathbb{R}} = 3$$

Este valor se alcanza cuando $x = 0$, luego además de supremo representa el valor máximo.

Nota. El supremo no tiene por qué ser alcanzado. P. ej., si en f y g se multiplican los numeradores por x^2, la distancia entre ambas sigue siendo 3, pero el supremo corresponde a $x \to \infty$.

Ejercicio. Calcula la distancia entre $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3$, $x \in [0,1]$ $\left(d = 5 \cdot 6^{-6/5}\right)$.

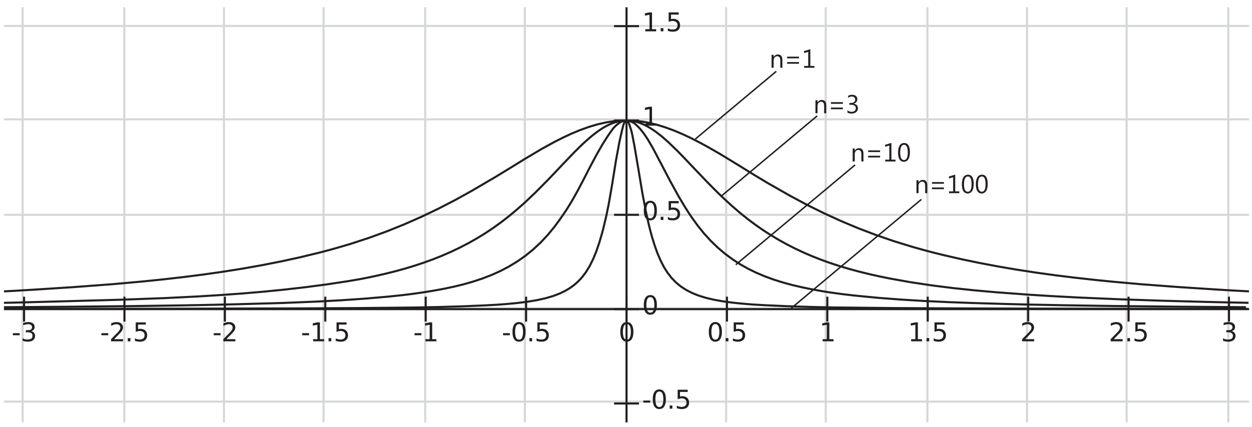
1.2. Sucesión funcional

Es una sucesión cuyos términos son funciones reales definidas en un cierto $I \in \mathbb{R}$.

$$\{f_n\} = f_1, f_2, \dots f_n \dots, \quad f_n \in \mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$$

Ejemplo. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2} \Longrightarrow \{f_n\} = \dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{1+2x^2}, \dfrac{1}{1+3x^2} \dots \dfrac{1}{1+nx^2} \dots$

Se muestran en la figura las curvas correspondientes a distintos valores de n. Obsérvese que todas ellas pasan por el punto $(0,1)$ y, para todo x no nulo, se aproximan a OX al crecer n.



1.3. Convergencia simple o puntual

Si fijamos un $x \in I$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ que resulta es una sucesión numérica. Su límite, si existe, será función del x fijado. A partir de lo estudiado en sucesiones numéricas, decimos que la sucesión tiene límite $f(x)$ si se cumple:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \iff \forall\varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \big/ \; |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \; \forall m \geq n}$$

es decir si, a partir de un índice suficientemente avanzado, los términos de la sucesión se aproximan tanto como queramos al valor $f(x)$.

Si esto ocurre $\forall x \in I$, decimos que la sucesión funcional $\{f_n\}$ converge simple o puntualmente a la función f en I.

En el ejemplo anterior, todas las curvas pasan por el punto $(0, 1)$, mientras que, fuera del origen, se acercan tanto como queramos al eje OX, si n es suficientemente alto. Entonces resulta

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

y obtenemos una función límite discontinua en el origen.

El conjunto $\mathcal{C}$ de puntos en los que $\{f_n\}$ converge se llama **Campo de Convergencia**.

Ejercicio. Estudia la sucesión funcional $\{\operatorname{sen}^n x\}$, $x \in [0, \pi/2]$, comprobando que su función límite es similar a la que acabamos de obtener.

1.4. Convergencia uniforme

En la convergencia simple que acabamos de ver se exige que, para todo $\varepsilon > 0$ exista un índice n tal que, a partir de él, la diferencia $|f_m(x) - f(x)|$ se haga menor que ε. Como es lógico, el valor de n dependerá de ε, pero puede depender también del punto x elegido, es decir

$$n = n(\varepsilon, x) \quad \text{(convergencia simple)}$$

Lo anterior permite que los n obtenidos puedan ser muy distintos para los distintos puntos x y, como consecuencia, que la función límite f pueda ser muy diferente de las f_n (en el ejemplo, las f_n son continuas y f no lo es).

Si, dado un ε, podemos encontrar un valor máximo n_0 para los distintos $n(\varepsilon, x)$, entonces

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \; \forall m \geq n_0, \, \forall x \in I$$

y a partir de un único n_0 se cumple la condición de convergencia para todo x, lo que nos permite independizarnos del punto pues el índice n depende ahora sólo de ε. En este caso se dice que la convergencia es uniforme y algunas propiedades de las funciones f_n se transmiten a f.

Definición. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $I \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n\,(\varepsilon) \big/ \; d(f_m, f) < \varepsilon, \; \forall m \geq n$$

O, lo que es lo mismo

$$\boxed{f_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ en } I \iff \lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0}$$

(recordamos que $d(f_n, f) = \sup |f_n(x) - f(x)|$, $x \in I$).

La convergencia uniforme supone la simple, puesto que la primera cumple las mismas condiciones que la segunda, más alguna condición adicional.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia de $f_n = \dfrac{x}{1+nx}$, $x \in [1,2]$ en tres pasos. Primero calculamos el límite $f(x)$ para un $x \in I$ dado. A continuación obtenemos la distancia entre las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$. Por último, calculamos el límite de esta distancia cuando $n \to \infty$.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, luego f_n converge simplemente a $f(x) = 0$.

2) $d(f_n, f) = \sup \left| \dfrac{x}{1+nx} - 0 \right|_{x\in I} = \sup \left| \dfrac{1}{1/x+n} \right|_{x\in I} = \dfrac{1}{1/2+n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1/2+n} = 0$, luego la convergencia es uniforme.

Ejercicio. Comprueba que convergen uniformemente las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes:

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{1}{2n-\sqrt{x}},\ x \in [1,2]; \qquad \text{b) } f_n(x) = \frac{\cos x^2}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$$

1.5. Sucesión de funciones continuas

Sea una sucesión de funciones f_n, definidas en I. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I y las f_n son continuas en I, entonces f es continua en I. Es decir,

$$\boxed{f_n \text{ continuas } + \text{ convergencia uniforme } \Longrightarrow f \text{ continua}}$$

(la demostración puede verse en los documentos de apoyo del tema).

Aplicación. Dada una sucesión $\{f_n\}$, suele ser sencillo encontrar su función límite $f(x)$ así como averiguar si las f_n y la f son continuas. Pero resulta más complicado analizar si la convergencia es uniforme.
El teorema nos resuelve el estudio en muchos casos pues, si una sucesión de funciones continuas converge a una función límite discontinua, la convergencia no será uniforme. Si lo fuera, $f(x)$ sería continua, cosa que no ocurre.

Ejemplo. Estudiamos la convergencia simple y uniforme de la sucesión de funciones $\{x^n\}$, en el intervalo $I = [0,1]$.

- Para $x = 1$, se cumple $x^n = 1, \forall n$.
- Para $x \in [0,1)$, $x^n \to 0$, si $n \to \infty$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

luego la función límite $f(x)$ es discontinua. Como las funciones f_n son continuas $\forall n$, podemos asegurar que la convergencia no es uniforme.

Ejercicio. Estudia la convergencia de las sucesiones funcionales

$$\text{a) } \{\cos^n x\},\ x \in [0,\pi/2]; \qquad \text{b) } \left\{e^{-nx^2}\right\},\ x \in \mathbb{R}$$

2. Series funcionales

2.1. Definición

Dada una sucesión $\{f_n\}$, definimos la suma parcial n-ésima F_n como

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

A la sucesión de sumas parciales $\{F_n\}$, la llamamos **serie funcional asociada a** $\{f_n\}$. La serie se denota $\sum f_n$. Los sumandos f_i son los términos de la serie y f_n es el término general.

Ejemplo. Si $f_n = \operatorname{sen} \dfrac{x}{n}$, la serie asociada a $\{f_n\}$ será $\sum \operatorname{sen} \dfrac{x}{n}$ y la suma parcial n-ésima

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{x}{i} = \operatorname{sen} \frac{x}{1} + \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{x}{n}$$

2.2. Convergencia simple y uniforme

Sea una serie funcional $\sum f_n$. Razonando como en **1.3**, si fijamos un $x \in I$, resulta una serie numérica. Si converge, su suma será función del x elegido.

Convergencia simple. Decimos que la suma de la serie es $F(x)$, si los términos $F_n(x)$ de la sucesión de sumas parciales se aproximan al valor $F(x)$ tanto como queramos.

Si esto se cumple para cada $x \in I$, entonces la serie $\sum f_n$ converge simplemente a la función F en I. La condición es:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \, \big/ \; |F_m(x) - F(x)| < \varepsilon, \, \forall m \geq n}$$

En este caso escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = F(x) \quad \big(F(x) \text{ es la función suma}\big)$$

Ejemplo. Un caso muy sencillo de serie funcional es la serie geométrica de razón x:

$$x + x^2 + \ldots x^n + \ldots$$

Esta serie converge si $|x| < 1$ y su suma vale $S = x/(1-x)$ (T. III. Series Numéricas).

Convergencia uniforme. Como vimos en sucesiones funcionales, la convergencia será uniforme si $n = n(\varepsilon)$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n\,(\varepsilon) \big/ \, d(F_m, F) < \varepsilon, \, \forall m \geq n$$

O, lo que es lo mismo,

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformemente a } F \text{ en } I \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(F_n, F) = 0}$$

siendo la distancia entre F_n y F el supremo de las distancias punto a punto entre ambas, cuando x toma valores en I.

El estudio de la convergencia uniforme de una serie resulta más complicado que el de una sucesión; pues F_n es la suma parcial de los términos de la sucesión. Por ello resulta de gran utilidad el criterio de la mayorante, que enunciamos a continuación.

2.3. Criterio de la mayorante (Weierstrass)

Sea $\sum f_n$, definida en $I \in \mathbb{R}$. Si $\sum |f_n(x)|$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos, convergente, $\sum f_n$ es uniformemente convergente en I.

Ejemplo. La serie $\sum \frac{1}{n^2}(\operatorname{sen} nx + \cos nx)$ cumple $|f_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$, $\forall n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $\sum |f_n|$ es minorante de una serie numérica convergente, luego converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio. Comprueba la convergencia uniforme, en sus intervalos de definición, de las series:

$$\text{a) } \sum \frac{x^n}{3^n},\ x \in [0, 2]; \qquad \text{b) } \sum \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^n}{n^3},\ x \in [0, \pi/4]$$

2.4. Serie de funciones continuas

Sea $I = [a, b]$. Si una serie $\sum f_n$, de funciones continuas en I, converge uniformemente en I a su función suma F, esta es continua en I.

Demostración. Sabemos (apdo. **1.5**) que si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente a su función límite f, esta es continua.
Entonces, si las f_n son continuas en I, la suma parcial $F_n = \sum_1^n f_i$ será también continua en I, por ser suma de funciones continuas.
Como F_n converge uniformemente en I a su función suma F, esta es continua en I.

2.5. Integración de una serie de funciones

Nuestro principal interés en la integración y derivación de las series de funciones (**2.5** y **2.6**) está en que se utilizarán más adelante en el caso particular de las series de potencias. Aquí nos limitaremos a enunciar las condiciones para realizar ambas operaciones y las propiedades que cumplen (la demostración puede verse en los documentos de apoyo).

Sea $I = [a, b]$. Si una serie $\sum f_n$, de funciones integrables en I, converge uniformemente en I a su función suma F, esta es integrable en I y su integral es la suma de la serie de integrales.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \Longrightarrow \int_a^x F(t)dt \overset{\text{c.u.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^x f_i(t)dt, \quad x \in [a, b]}$$

Esto puede expresarse abreviadamente diciendo que *si una serie de funciones integrables converge uniformemente a F, la integral de la suma es la suma de la serie de integrales.*

2.6. Derivación de una serie de funciones

Sea $I = [a, b]$. *Sea una serie $\sum f_n$, de funciones derivables en I, que converge en un punto de I, tal que $\sum f_n'$ converge uniformemente en I. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I a su función suma F, que es derivable en I y su derivada es la suma de la serie de derivadas.*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = F(x_0) \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \overset{\text{c.u.}}{=} G(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{\text{c.u.}}{=} F(x) \ \text{ y } \ F'(x) = G(x)}$$

Podemos expresarlo abreviadamente diciendo que, en ciertas condiciones, *la derivada de la suma de una serie de funciones derivables es la suma de la serie de las derivadas.*

3. Series de potencias

3.1. Definición

Una serie de potencias es un caso particular de serie funcional, en el que $f_n(x)$ toma la forma

$$f_n(x) = a_n(x-a)^n,\ a_n \in \mathbb{R}$$

Habitualmente se elige $a=0$ y la expresión de la serie resulta $\sum a_n x^n$.

En las series de potencias suele incluirse el término correspondiente a $n=0$, por lo que

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

3.2. Teorema de Cauchy-Hadamard

Para toda serie de potencias $\exists\, r \big/ 0 \leq r \leq \infty$ *(radio de convergencia) tal que:*

- *Si* $|x| < r$*, la serie es absolutamente convergente.*

- *Si* $|x| > r$*, la serie no es convergente.*

Demostración. Como vimos en series numéricas, la convergencia absoluta es equivalente a la incondicional, por lo que aplicamos el criterio de la raíz n-ésima a $\sum |a_n x^n|$ (que se convierte en una serie numérica para cada $x \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = l\,|x|$$

a) Si $l \neq 0$ y $l \neq \infty$, estudiamos dos opciones:

a.1) Si $|x| < \dfrac{1}{l} \Longrightarrow l\,|x| < 1 \Longrightarrow \sum |a_n x^n|$ convergente.

Entonces la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente.

a.2) Si $|x| > \dfrac{1}{l} \Longrightarrow l\,|x| > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1.$

Que el límite sea mayor que 1, significa que

$$\exists n_0 \ / \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n x^n| > 1\ \forall n \geq n_0$$

luego no se cumple la condición necesaria de convergencia y la serie no converge.

b) Si $l=0$, entonces $\forall x$, $l\,|x| = 0 < 1$, por lo que decimos que $r=\infty$.

c) Si $l=\infty$ entonces el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$$

será menor que 1 sólo si $x=0$, en cuyo caso todos los productos $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$ serán nulos y el límite también lo será. Decimos entonces que $r=0$.

Es decir, hemos hallado un valor r que cumple la condición del enunciado, con lo que queda demostrado el teorema. Si $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, este valor de r es:

$$\boxed{\textbf{a)}\ r=0,\ \text{si } l=\infty\,;\quad \textbf{b)}\ r=\infty,\ \text{si } l=0\,;\quad \textbf{c)}\ r=\frac{1}{l},\ \text{si } l\neq 0,\ l\neq\infty}$$

Notas. Es importante tener en cuenta lo siguiente:

1. Para $|x| = r$, el teorema no afirma nada, por lo que la serie puede ser convergente o no y **hemos de estudiar la serie numérica que resulta para** $x = \pm r$.

2. Se dice que una sucesión $\{\alpha_n\}$ tiene un **límite de oscilación** $\alpha \in \mathbb{R}$ o $\alpha = \infty$, si existe alguna subsucesión de $\{\alpha_n\}$ que tiene límite α (o, lo que es equivalente, si en todo entorno de α hay infinitos elementos de $\{\alpha_n\}$). Esto puede ocurrir, por ejemplo, si α_n no tiene expresión única, sino que es distinto para términos pares e impares.

   Una sucesión de números reales no tiene por qué tener límite, pero sí algún límite de oscilación, finito o infinito (J. Burgos, p. 73). Si además está acotada, sus límites de oscilación serán finitos (T. Bolzano-Weierstrass para sucesiones). Si obtenemos distintos valores, tomaremos para l el mayor de ellos, es decir el límite superior de oscilación:

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

3. Podemos también calcular l como límite del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

   pues, si existe este, existe el de la raíz n-ésima y vale lo mismo (regla de la raiz).

4. A partir de este teorema, resulta que el campo de convergencia $\mathcal{C}$ de las series de potencias toma siempre una de estas cuatro formas:

$$(-r, r),\ (-r, r],\ [-r, r),\ [-r, r]$$

Ejemplos. Calculamos el radio y el campo de convergencia de las siguientes series:

1. $\sum \frac{x^n}{n^n}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow r = \infty$. Luego $\mathcal{C} = \mathbb{R}$.

2. $\sum n^n x^n$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow r = 0$. Luego $\mathcal{C} = \{0\}$.

3. $\sum \frac{x^n}{2^n}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow r = 2$. Luego $\mathcal{C} = (-2, 2)$, pues:

   - $\sum \frac{2^n}{2^n} = \sum 1$, luego para $x = 2$, la serie es divergente.

   - $\sum \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum (-1)^n$, luego para $x = -2$, la serie es oscilante.

Ejercicios. Comprueba que los campos de convergencia son los indicados:

1. $\sum n! x^n$, $\mathcal{C} = \{0\}$.

2. $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\mathcal{C} = \mathbb{R}$.

3. $2x + 2x^2 + 2^3x^3 + 2^3x^4 + \dots$, $\mathcal{C} = (-1/2, 1/2)$.

4. $1 + x + 25x^2 + 3x^3 + 625x^4 + \cdots + a_n x^n + \dots$, donde $\begin{cases} a_n = n, & n \text{ impar} \\ a_n = 5^n, & n \text{ par} \end{cases}$, $\mathcal{C} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$.

3.3. Continuidad, derivación e integración

Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$, de radio de convergencia $r > 0$, y $S(x)$ su suma. Se cumple:

a) $S(x)$ es continua en todo $x \in (-r, r)$.

b) $S(x)$ es derivable en todo $x \in (-r, r)$ siendo su derivada $\boxed{S'(x) = \sum n a_n x^{n-1}}$

c) $S(x)$ es integrable en $[0, x], \forall x \in (-r, r)$. Su integral es $\boxed{\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}$

Es decir:

1. **Las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término**, siendo la derivada de la suma, la suma de las derivadas de los términos y la integral de la suma, la suma de las integrales de los términos.

   Obsérvese que se trata de las integrales de los términos pues estamos integrando los sumandos $a_n t^n$ entre 0 y x. La expresión que resulta coincide con la primitiva de $a_n x^n$.

2. Como se ve en la demostración, al derivar o integrar una serie obtenemos otra del **mismo radio de convergencia**. En cambio, el campo puede variar, pues el intervalo en que derivamos o integramos es abierto, por lo que no podemos asegurar nada para los extremos.

Demostración. Puede verse en los documentos de apoyo.

Aplicación. Las dos series geométricas siguientes son de gran utilidad para aplicar las propiedades anteriores a la resolución de problemas, como se verá en los ejemplos:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$, cuya suma es $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \ldots$, cuya suma es $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $|x| < 1$.

Ejemplo 1. Calculamos la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Partimos de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, de suma conocida $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Para conseguir el factor n en el numerador, derivamos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots \Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \ldots$$

Con el fin de tener también n en el exponente, multiplicamos ambos miembros por x, resultando

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Por último, haciendo $x = 1/2$, nos queda la suma buscada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

Nota. Hemos aplicado la propiedad **3.3. b)**.

Ejemplo 2. Se trata de obtener el radio de convergencia y la función suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

Calculamos el radio de convergencia.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1\Longrightarrow r=\frac{1}{l}=1$$

Derivamos la serie, obteniendo

$$1-x+x^2-x^3+\dots$$

Se trata de una serie geométrica de razón $-x$, cuya suma es

$$S(x)=\frac{1}{1+x},\ |x|<1$$

La integral de esta función suma será la suma de la serie de la que partimos. Así pues, calculamos la integral entre 0 y x de $S(t)$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\ln(1+t)|_0^x=\ln(1+x)-\ln 1=\ln(1+x),\ |x|<1$$

Nota. Hemos aplicado las propiedades **3.3. b)** y **c)**, derivando la serie problema, sumando la serie resultante e integrando la función suma obtenida.

Ejercicio. Calcula la suma de la series numéricas siguientes

$$\textbf{a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}\quad(S=3/2)\,;\quad\textbf{b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\quad(S=6)$$

3.4. Teoremas de Abel

Estos teoremas permiten estudiar la suma de una serie en los extremos de su campo de convergencia, $x=\pm r$ (puede verse una demostración en J. Burgos, p. 548).

Sea la serie $\sum a_n x^n$*, de radio de convergencia* $r>0$.

1. *Si* $\sum a_n x^n$ *converge en* $x=r$ $(x=-r)$*, converge uniformemente en* $[0,r]$ $\big([-r,0]\big)$.
2. *Si* $\sum a_n x^n$ *converge en* $x=r$ $(x=-r)$*, su suma es una función continua en* $x=r$ $(x=-r)$ *e integrable en* $[0,r]$ $\big([-r,0]\big)$.

Aplicación. El segundo teorema de Abel permite obtener el valor de la suma de una serie en $x=\pm r$, a partir de su expresión en $(-r,r)$, utilizando la continuidad de la función suma en los extremos de $\mathcal{C}$. En efecto, si $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia r y suma $S(x)$, sabemos que:

- La función suma $S(x)$ es continua en $(-r,r)$, como vimos en **3.3. a)**.
- Si $\sum a_n x^n$ converge en $x=r$ $\big(\sum a_n r^n$ es convergente$\big)$, el teorema asegura que $S(x)$ es continua también en $x=r$. Es decir, podemos calcular su valor en $x=r$ tomando límites en la expresión de $S(x)$ para $x\in(-r,r)$ (y análogamente con $x=-r$).

$$\boxed{\sum a_n r^n=S(r)=\lim_{x\to r}S(x)}$$

Nota. Que la suma tenga una expresión en función de x para $x \in (-r, r)$ y que en $x = r$ la serie converja, no asegura que podamos usar para la suma en el extremo del intervalo la expresión válida para el interior. En efecto, la suma $S(x)$ podría estar definida de distinta forma en $(-r, r)$ y en $x = \pm r$, de modo que la expresión para $(-r, r)$ podría ni siquiera tener sentido en $x = r$.

Ejemplo 1. Estudiamos la convergencia uniforme de la serie $\sum \frac{x^n}{n}$.

- Aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard vemos que tiene radio de convergencia $r = 1$, por lo que converge en el intervalo $(-1, 1)$.
- Estudiándola en $x = \pm 1$, vemos que también converge en $x = -1$ (en $x = 1$ diverge).
- Entonces, por el primer teorema de Abel, sabemos que converge uniformemente en el intervalo $[-1, 0]$ y también en todo intervalo $[0, x_0]$, $\forall x_0 < 1$.
- Uniendo ambos intervalos, podemos afirmar que converge uniformemente en todo intervalo

$$[-1, x_0] \subset [-1, 1)$$

Ejemplo 2. Queremos obtener la suma de la serie numérica alternada de los inversos de los impares, como caso particular ($x = 1$) de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (1)$$

Para ello, partimos de la serie geométrica de razón $\lambda = -x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad (2)$$

que converge a

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ |x| < 1$$

Vemos que, integrando la serie (2), obtenemos la serie (1), por lo que – teniendo en cuenta **3.3.c)**– la suma $S(x)$ de la serie (1) será la integral de la suma $s(x)$ de la serie (2). Es decir,

$$S(x) = \int_0^x s(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t|_0^x = \arctan x$$

Al integrar, el radio de convergencia se mantiene, por lo que esta función suma es válida para $|x| < 1$. Pero, en principio, no podemos sustituir $x = 1$ en $S(x)$.

Sabemos que la serie (1) converge en $x = 1$ (teorema de Leibnitz). Entonces, aplicando el segundo teorema de Abel, podemos obtener el valor de la suma en $x = 1$ tomando límites, cuando $x \to 1$, en la función $S(x) = \arctan x$. Al ser continua la función arcotangente, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio. Se pide obtener la suma de la serie alternada de los inversos de los pares, como caso particular de la serie de potencias siguiente, en los extremos de su campo de convergencia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \cdots$$

3.5. Desarrollo de una función en serie de potencias. Serie de Taylor

a. Desarrollo en serie de potencias

Sean el intervalo $\mathcal{C} = (-r, r)$, la serie de potencias $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$, y la función f definida en $\mathcal{C}$. Si la suma de la serie coincide con el valor de la función en $\mathcal{C}$, decimos que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de f en $\mathcal{C}$.

Ejemplo. Sean una serie de potencias y una función definidas respectivamente como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + \dots \qquad f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

La función existe en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x = \pm 1$. La serie es geométrica de razón x^2, por lo que converge si $|x| < 1$ y su suma vale

$$S(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Esta función suma coincide con $f(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$, luego podemos afirmar que $\sum x^{2n+1}$ es un desarrollo en serie de $f(x)$ en $\mathcal{C} = (-1, 1)$.

Nota. Como acabamos de ver, el campo de existencia de la función no tiene por qué coincidir con el de convergencia de la serie. La serie será un desarrollo en serie de la función sólo en los puntos comunes de su campo de convergencia y del dominio de existencia de f.

b. Serie de Taylor

Recordamos que, al estudiar funciones reales, llamábamos desarrollo limitado de Taylor de orden n, de una función suficientemente derivable, a la expresión:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!}\, x^i + T_n(x)$$

es decir, la suma del polinomio de Taylor más el término complementario.

Supongamos ahora que una función f admite desarrollo en serie de potencias, con unos ciertos coeficientes a_n:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ en } (-r, r)$$

Al venir expresada como suma de términos de la forma $a_n x^n$, la función será derivable, siendo su derivada la suma de la serie derivada (apdo. **3.3**):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} \quad \text{ en } (-r, r)$$

También $f', f'' \dots$ serán derivables. Reiterando el proceso se observa que (J. Burgos, p. 510):

- La función f pertenece a C^∞ en $(-r, r)$ (es derivable tantas veces como queramos).
- Su derivada k-ésima en el origen vale $f^{(k}(0) = k!\, a_k$, de donde $a_k = \dfrac{f^{(k}(0)}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Vemos que los coeficientes del desarrollo toman la expresión de Taylor (recordada más arriba), lo que nos permite calcular dichos coeficientes para cualquier función que admita desarrollo en serie. Así pues, llamaremos **desarrollo en serie de Taylor** de la función f a:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}\, x^n}$$

Ejemplo. Consideramos la serie geométrica $\sum x^n$. Si, como en este caso, conocemos su suma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1)$$

podemos decir que la serie es el desarrollo en serie de Taylor de $f(x) = 1/(1-x)$.

Habitualmente procederemos en sentido inverso, partiendo de una función y obteniendo su desarrollo. Si, en nuestro ejemplo, calculamos las derivadas sucesivas de f en $x = 0$ y, a partir de ellas, los coeficientes a_n, resulta

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow f^{(k}(0) = k! \Longrightarrow a_k = \frac{f^{(k}(0)}{k!} = 1$$

con lo que todos toman el mismo valor ($a_n = 1, \forall n$). La serie de Taylor obtenida es $1+x+x^2+\ldots$, que lógicamente coincide con la que consideramos al principio. Es decir,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

c. Condición necesaria y suficiente

Si $f \in C^\infty$, podemos calcular sus sucesivas derivadas y, a partir de ellas, los coeficientes del desarrollo de Taylor. Puede parecer entonces que la condición de pertenecer a C^∞ es suficiente para que f admita desarrollo en serie de Taylor, pero no es así: es necesaria, pero no suficiente. Enunciamos a continuación la condición necesaria y suficiente.

Sea $f \in C^\infty$. Es condición necesaria y suficiente para que f admita desarrollo en serie de Taylor en $(-r, r)$ que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0, \ \forall x \in (-r, r)}$$

Demostración. Tomamos el desarrollo limitado de Taylor de la función f, del que despejamos el término complementario.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!} x^i + T_n(x) \Longrightarrow T_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!} x^i \qquad (1)$$

La serie de Taylor convergerá a $f(x)$ en $(-r, r)$ si y sólo si el límite del polinomio de Taylor de grado n (que aproxima el valor de la función) es igual a $f(x)$, cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!} x^i = f(x)$$

Pero esto equivale a decir que

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!} x^i \right) = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$$

Nota. Este resultado era de esperar, pues el término complementario $T_n(x)$ es la diferencia entre el valor exacto de la función y el valor aproximado obtenido con el polinomio de Taylor de grado n. Luego, para que la serie represente exactamente a la función, esa diferencia debe hacerse tan pequeña como queramos tomando un número de términos suficientemente alto. Es decir, $T_n(x)$ debe tener límite 0 cuando $n \to \infty$.

4. Ejercicios de autoevaluación

4.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. En el espacio funcional $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{R})$, hemos definido la distancia entre dos funciones como el máximo de sus distancias punto a punto.

2. Sea $f_n = \dfrac{x}{1+nx^2} + x$. Se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x$.

3. La sucesión de término general $f_n(x) = \operatorname{sen}^n x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ converge uniformemente a
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \pi/2 \\ 0, & x \neq \pi/2 \end{cases}$$

4. Sea $\sum f_n$ definida en I. Si $\sum |f_n(x)|$ tiene como mayorante en I a una serie numérica de términos positivos, convergente, $\sum f_n$ es uniformemente convergente en I.

5. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Su campo de convergencia es $(-1,1)$.

6. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$. Su campo de convergencia es $[-1,1)$.

7. Una serie de potencias y sus series derivada y primitiva tienen el mismo campo de convergencia.

8. La serie de potencias $\quad -1 - x - x^2 - x^3 \dots$ tiene como suma $\dfrac{1}{x-1},\quad |x| < 1$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $\sum a_n x^n$, convergente en $\mathcal{C}$, tal que $\sum a_n x^n = f(x)$. Se dice entonces que $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de $f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Si una función f es derivable indefinidamente, decimos que f pertenece a C^∞. Entonces, podemos obtener sus derivadas de cualquier orden, por lo que la función admite desarrollo en serie de Taylor.

4.2. Cuestión

El desarrollo en serie de la función $f(x) = \ln(1+x)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$

y su radio de convergencia vale $r = 1$. Se pide, utilizando el segundo Teorema de Abel, obtener la suma de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

4.3. Solución del test verdadero/falso

1. **F**. Se ha definido como "el supremo de sus distancias punto a punto", que existe siempre por tratarse de funciones acotadas (propiedad del supremo), mientras que el máximo puede no existir.

   Ej. Si $f(x) = 1/x,\ g(x) = 1$ y $I = [1, \infty)$, el conjunto de las distancias punto a punto entre f y g no tiene máximo. El supremo vale 1 y se da cuando $x \longrightarrow \infty$.

2. **V**. Para $x \neq 0$ el límite vale x, pues el denominador de la fracción tiende a ∞ y el primer sumando a 0. Para $x = 0$, las f_n valen 0, por lo que el límite vale 0, es decir x.

3. **F**. La función límite del enunciado es correcta, pero la convergencia no es uniforme, pues las funciones f_n son continuas y f no lo es (ver apdo. **1.5**).

4. **V**. Por el criterio de la mayorante (Weierstrass).

5. **V**. El límite $l = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo que $r = 1/l = 1$. Estudiando los extremos de $\mathcal{C}$ $(x = \pm 1)$, vemos que en ellos la serie es divergente.

6. **V**. El límite $l = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo que $r = 1/l = 1$. Estudiando los extremos de $\mathcal{C}$, vemos que en $x = 1$ la serie es divergente y en $x = -1$ convergente.

7. **F**. Tienen igual **radio** de convergencia (ver apdo. **3.3**).

8. **V**. $-1 - x - x^2 - x^3 \ldots$ es una serie geométrica de razón $\lambda = x$. Su suma será

$$S(x) = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}, \quad |x| < 1$$

9. **F**. $\sum a_n x^n$ es un desarrollo en serie de $f(x)$ en $\mathcal{C}$, donde la serie converge, no en todo $\mathbb{R}$.

10. **F**. Que f pertenezca a C^∞ es una condición necesaria, pero no suficiente, para que admita desarrollo en serie de Taylor. La condición necesaria y suficiente es que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = 0$, siendo $T_n(x)$ el término complementario del desarrollo limitado de Taylor (ver apdo. **3.5**).

4.4. Solución de la cuestión

La serie numérica cuya suma queremos obtener converge por el teorema de Leibnitz.

La serie de potencias del enunciado tiene como suma la función $S(x) = \ln(1 + x)$, para valores de $|x| < 1$. En los extremos del intervalo de convergencia $(x = \pm 1)$ puede converger o no y hay que estudiarlo en cada caso.

Para $x = +1$, la serie de potencias se convierte en la serie buscada: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

El segundo teorema de Abel afirma que "si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge para $x = r$, su suma es una función continua en $x = r$". Como conocemos el valor de $S(x)\, \forall x \in (-1, 1)$, podemos obtener el valor de la suma de la serie en $x = 1$ como límite de $S(x)$ cuando $x \to 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1} \ln(1 + x) = \ln(1 + 1) = \ln 2$$

como ya sabíamos por el tema III (Series numéricas).

Nota. En el otro extremo del campo de convergencia $(x = -1)$, la serie que resulta es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

opuesta de la armónica, por tanto divergente a $-\infty$.

Tema V. Los números complejos (26.04.2024)

1. Introducción

El objetivo de este tema es dar unas nociones básicas sobre los números complejos (una definición axiomática rigurosa puede verse en J. Burgos, pgs. 559 y ss).

Como sabemos, existe una biyección entre los puntos de la recta y los números reales, por lo que a cada elemento de uno de los dos conjuntos le corresponde uno, y sólo uno, del otro. Ello nos permite encontrar solución en $\mathbb{R}$ para ecuaciones que no la tienen en $\mathbb{Q}$, pese a lo cual siguen existiendo ecuaciones sin solución. Una de las más sencillas es:

$$x^2 + 1 = 0$$

Con el fin de resolverla fuera de los números reales, definimos el número $i = \sqrt{-1}$, al que llamamos **unidad imaginaria**. De este modo, la ecuación tiene como solución

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

A los números de la forma ki, con $k \in \mathbb{R}$, les llamamos **imaginarios** (o imaginarios puros). Si consideramos la ecuación

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

llegamos a la solución

$$x = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Como este resultado es la suma de un numero real y de otro imaginario, lo denominamos **número complejo**. A partir de la definición de este nuevo tipo de numero, podemos resolver ecuaciones como $e^x = -1$ ó $\cos x = 2$, que no tienen sentido en $\mathbb{R}$.

2. Definición. Forma binómica. Operaciones básicas

Un número complejo en **forma binómica** es todo elemento de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales y se llaman **parte real** y **parte imaginaria** de z respectivamente.

Tanto los números reales como los imaginarios puros son números complejos. Los primeros son complejos con la parte imaginaria nula ($b = 0$) mientras que los segundos tienen nula la parte real ($a = 0$). El conjunto de los números complejos se denota $\mathbb{C}$.

Sean los complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. Definimos las siguientes operaciones.

a) Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$.

b) Producto: $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \in \mathbb{C}$.

c) Producto por $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot z = \lambda a + \lambda b i \in \mathbb{C}$.

Dos **complejos** son **iguales** si coinciden entre sí tanto las partes reales como las imaginarias:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2}$$

Es inmediato comprobar que el elemento **nulo** en $\mathbb{C}$ es el $0 = 0 + 0i$ y el elemento **unidad** es el $1 = 1 + 0i$. A partir de lo anterior se demuestra que $\mathbb{C}(+, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo (es también un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$).

De igual modo que los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cada uno ampliación del anterior, $\mathbb{C}$ es una ampliación de $\mathbb{R}$. Basta observar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a = a + 0i \in \mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, y que las operaciones entre complejos de la forma $a + 0i$ se reducen a las operaciones entre reales.

3. Forma trigonométrica. Representación gráfica

Considerando las partes real (a) e imaginaria (b) de un complejo z como coordenadas cartesianas, observamos que existe una biyección entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$. De hecho la expresión (a,b) es la **forma cartesiana** del complejo z. Esto permite representar z gráficamente como un punto del plano XY (que llamaremos **afijo**) así como por un vector que une el origen O con el afijo.

Llamando **módulo** ρ a la longitud de dicho vector y **argumento** θ al ángulo que forma el vector con la dirección positiva del eje X (para z no nulo), resulta:

$$a = \rho\cos\theta, \quad b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

Para todo $z \neq 0$ existe un único valor $\theta \in (-\pi, \pi]$ (**argumento principal**) e infinitos valores $\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (argumentos). Entonces z puede expresarse en **forma trigonométrica** como

$$z = a + bi = \rho\cos\theta + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,i = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

y la condición de igualdad de dos complejos se convierte en

$$\boxed{z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ y } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

es decir, dos **complejos** son **iguales** si y solo si tienen el mismo módulo y sus argumentos se diferencian en un número entero de veces 2π.

Interpretación geométrica de la suma de complejos. Al representar los complejos por medio de dos componentes (como los vectores en el plano) observamos que su suma sigue también la regla del paralelogramo, por lo que sumar z a z_1 equivale a trasladar el afijo de z_1 según z; es decir, desplazarlo una distancia ρ, según la dirección dada por θ.

Entonces, sumar z a los complejos cuyos afijos forman una **figura geométrica**, equivale a trasladar la figura una distancia ρ, según la dirección dada por θ, sin deformarla ni girarla.

Interpretación geométrica del producto de complejos. Sean $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$. Operando, obtenemos (compruébese):

$$z_1 \cdot z_2 = \cdots = \rho_1\rho_2\big[\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i(\underbrace{\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2}_{\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)})\big]$$

Es decir, el producto de dos complejos tiene como módulo el producto de sus módulos y como argumento la suma de sus argumentos. Entonces

- Al multiplicar z_1 por $\rho \in \mathbb{R}$, multiplicamos su módulo por ρ, sin variar el argumento.
- Al multiplicar z_1 por $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, añadimos θ radianes a su argumento (lo giramos un ángulo θ en sentido antihorario), sin variar su módulo.

Por tanto, multiplicar por $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ a los complejos cuyos afijos forman una **figura geométrica** equivale a multiplicar sus dimensiones por ρ y girarla θ radianes en sentido antihorario.

Ejercicio. Sean los complejos $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 8 - 2i,\ z_3 = 8 + 2i,\ z_4 = 2 + 2i$.

a) Si los multiplicamos por $z = i/2$ ($\rho = 1/2$ y $\theta = \pi/2$), compruébese que la figura formada por sus afijos reduce su tamaño a la mitad y gira 90º grados en sentido antihorario.

b) ¿Qué ocurre si multiplicamos por i el complejo $z_2 - z_1$?

c) Si los afijos de z_1 y z_2 son dos vértices consecutivos de un cuadrado situado en el cuarto cuadrante, ¿cómo podemos obtener los otros dos vértices?

4. Complejo conjugado, opuesto e inverso. Cociente

Sea el complejo $z = a + bi$. Definimos los complejos conjugado, opuesto e inverso.

a) El **conjugado** de z $(\bar{z})$ se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria. Es decir,

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Se cumple:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

b) El **opuesto** de z $(-z)$ es el complejo que, sumado a z, da como resultado el complejo nulo. Es inmediato ver que su expresión es

$$\boxed{-z = -a - bi}$$

c) El **inverso** de $z \neq 0$ (z^{-1}) es el complejo que, multiplicado por z, da como resultado el complejo unidad. A partir de la propiedad del conjugado, resulta:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Longrightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Longrightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

d) El **cociente** de z_1 y z_2 $(z_2 \neq 0)$ se define como el producto de z_1 por el inverso de z_2.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}}$$

Esto puede interpretarse como el resultado de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador. En forma binómica,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Interpretación geométrica. Escribiendo z en la forma $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, obtenemos

a) $\bar{z} = \rho\big(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta\big) = \rho\big(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\big)$.

El conjugado de z tiene el mismo módulo que z y el argumento opuesto al de z.

b) $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{\rho^2} \cdot \rho\big(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\big) = \dfrac{1}{\rho}\big(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\big)$.

El inverso de z tiene como módulo el inverso de $|z|$ y como argumento el opuesto al de z.

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \cdots = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\big)$.

El módulo del cociente es el cociente ρ_1/ρ_2; el argumento, la diferencia $\theta_1 - \theta_2$.

Ejercicio. Se propone comprobar que:

1. El conjugado de la suma es la suma de los conjugados y el conjugado del producto el producto de los conjugados.

2. Un complejo es imaginario puro si y sólo si su opuesto es igual a su conjugado.

3. El inverso de z se obtiene, igual que en $\mathbb{R}$, por medio de la expresión $1/z$.

5. Exponencial de un complejo. Fórmula de Euler

Dado $z = a + bi$, la exponencial de z es el (único) complejo de módulo e^a y argumento b

$$\boxed{\exp(z) = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)}$$

Se define así la exponencial compleja para que conserve las propiedades que la función e^x posee en $\mathbb{R}$. En particular, la exponencial compleja de un número real, $\exp(a)$, $a \in \mathbb{R}$, coincidirá con la exponencial real de dicho número. En efecto, si el exponente es real, resulta:

$$a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exp(a) = \exp(a + 0i) = e^a(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^a$$

con lo que, por ejemplo, la exponencial del complejo nulo vale 1, como ocurre en $\mathbb{R}$.

La exponencial compleja suele denotarse como e^z de modo simplificado aunque inexacto, pues esta expresión no tiene en general solución única. En efecto, e^z es un caso particular de la potencia compleja de un complejo $z_1^{z_2}$ (no estudiada aquí), que tiene en general infinitas soluciones.

A partir de la definición se verifican también (compruébese):

a) $\boxed{e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}}$, de donde se obtiene $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$.

b) $\boxed{e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}}$, de donde se obtiene $\boxed{1/e^z = e^{-z}}$.

En el caso particular $z = \theta i$, su exponencial valdrá

$$e^z\big|_{z=0+\theta i} = e^0(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

de donde resulta la **fórmula de Euler**

$$\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$

Vemos que $e^{\theta i}$ representa el complejo de módulo 1 y argumento θ. Utilizando la fórmula de Euler resulta más sencillo recordar la expresión de la exponencial de z, pues

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Podemos ahora escribir un complejo en **forma exponencial**

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{\theta i}}$$

En esta forma, los complejos conjugado e inverso de $\rho e^{\theta i}$ resultan ser

$$\boxed{\bar{z} = \rho\, e^{-\theta i}; \quad z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-\theta i}}$$

Ejemplo. Veamos que $e^z = -1$ tiene solución en $\mathbb{C}$. En efecto:

$$e^z = -1 \Longrightarrow e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^{\pi i} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^a = 1 \Longrightarrow a = 0 \\ b = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Longrightarrow z = (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$$

Las soluciones son los infinitos números imaginarios puros de la forma $z = (2k+1)\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio. Represéntense en forma exponencial los complejos -1, i y $-i$. Calcúlese el valor o valores de x que satisfacen la ecuación $e^{xi} + i = 0$.

6. Potencia natural. Fórmula de Moivre

Al multiplicar el complejo z por sí mismo n veces, obtenemos el complejo z^n. Como sabemos por las propiedades del producto, su módulo valdrá ρ^n y su argumento $n\theta$, es decir

$$z^n = [\rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

En el caso particular $\rho = 1$, resulta la fórmula de Moivre

$$\boxed{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta}$$

Ejercicio. Calcula $\cos 3\theta$ y $\mathrm{sen}\,3\theta$ en función de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.
Sol: $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta$; $\mathrm{sen}\,3\theta = 3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta - \mathrm{sen}^3\theta$.

7. Raiz $n-$ésima de un complejo

Decimos que $\omega \in \mathbb{C}$ es raíz $n-$ésima de $z \in \mathbb{C}$ si la potencia n de ω es igual a z.

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \omega \Longleftrightarrow \omega^n = z}$$

Sea $z = \rho e^{\theta i}$ y ω su raíz $n-$ésima, $\omega = r\,e^{\varphi i}$. Se cumplirá

$$\omega^n = r^n\,e^{n\varphi i} = \rho e^{\theta i} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

es decir

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\,e^{\frac{\theta}{n}+k\,\frac{2\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Dando valores a k, obtenemos distintas soluciones para el argumento $\varphi = \frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}$:

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & \Longrightarrow \varphi_0 = \dfrac{\theta}{n} \\[2ex]
k = 1 & \Longrightarrow \varphi_1 = \dfrac{\theta}{n} + 1\,\dfrac{2\pi}{n} = \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{n} \\[2ex]
k = 2 & \Longrightarrow \varphi_2 = \dfrac{\theta}{n} + 2\,\dfrac{2\pi}{n} = \varphi_0 + 2\,\dfrac{2\pi}{n} \\
\quad\vdots & \\
k = n & \Longrightarrow \varphi_n = \dfrac{\theta}{n} + \cancel{n}\dfrac{2\pi}{\cancel{n}} = \varphi_0 + 2\pi \\[2ex]
k = n+1 & \Longrightarrow \varphi_{n+1} = \dfrac{\theta}{n} + (n+1)\,\dfrac{2\pi}{n} = \varphi_0 + \cancel{n}\dfrac{2\pi}{\cancel{n}} + \dfrac{2\pi}{n} = \varphi_1 + 2\pi
\end{array}$$

Vemos que, para $k = n$ y siguientes, los argumentos toman un valor anterior incrementado en 2π, por lo que el complejo que resulta es el mismo. Así pues obtenemos sólo n complejos distintos, por lo que **todo complejo no nulo tiene n raíces $n-$ésimas**.
Al tener todas las raíces igual módulo, los afijos estarán en una circunferencia de radio $\rho^{\frac{1}{n}}$. Y al ser la diferencia angular entre dos raíces consecutivas $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$, estarán equiespaciados.
Es decir, los afijos de las n raíces $n-$ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $\rho^{\frac{1}{n}}$.

Ejercicio. Calcula las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y sextas de la unidad.

8. Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ a_i \in \mathbb{C}$, *tiene alguna raiz compleja.* Como consecuencia, un polinomio de grado $n \geq 1$ tendrá n raices complejas.

Si los coeficientes a_i son reales, se cumple:

$P_n(z)$ tiene n raíces complejas, contando cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad, de modo que, para cada raíz compleja $a + bi$, es también raíz su conjugada $a - bi$.

Si existen p raíces reales distintas x_i, de orden de multiplicidad α_i y q raíces complejas no reales z_j, de orden β_j, cada una con su conjugada $\bar{z}_j$, descomponiendo en factores obtenemos:

$$\boxed{P_n(z) = a_n (z - x_1)^{\alpha_1} \ldots (z - x_p)^{\alpha_p} (z - z_1)^{\beta_1} (z - \bar{z}_1)^{\beta_1} \ldots (z - z_q)^{\beta_q} (z - \bar{z}_q)^{\beta_q}}$$

siendo el grado $n = \alpha_1 + \cdots \alpha_p + 2\,(\beta_1 + \cdots \beta_q)$.
Como consecuencia, si n es impar, habrá al menos una raiz real. Si n es par, el número de raíces reales será par o nulo.

9. Ejercicios de autoevaluación

9.1. Test verdadero/falso

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no.

1. Si multiplicamos por $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ a los complejos cuyos afijos forman un cuadrado centrado en el punto $C(3,0)$, los afijos de los complejos resultantes formarán un cuadrado de lado doble, girado 90 grados en sentido antihorario, centrado en el punto $C'(0,6)$.

2. Si sumamos $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ a los complejos cuyos afijos forman un triángulo de vértices los puntos $(-1,0)\,(0,0)$ y $(0,1)$, el vértice correspondiente al ángulo recto se desplazará una distancia igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo, paralelamente a ella.

3. El conjugado y el inverso de un complejo $z \neq 0$ coinciden, siempre que su módulo sea menor que 1.

4. Se cumple $e^{\frac{3\pi}{2}i} + i = 0$.

5. El inverso de e^z cumple: $(e^z)^{-1} = \dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

6. Los afijos de las raíces quintas de la unidad forman un pentágono regular, con un vértice en el eje real.

7. Los afijos de las raíces $2n, n \in \mathbb{N}$, de la unidad forman un polígono regular de $2n$ vértices, con dos vértices en el eje imaginario.

8. El polinomio $P_7(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_7 z^7$ tiene 7 raíces en $\mathbb{C}$, de las cuales son reales un número impar de ellas, comprendido entre 1 y 7.

9.2. Cuestión

Sea el complejo $z = x + yi$. Se pide razonar en qué casos se verifican las siguientes igualdades:

a) $|e^z| = e^{|z|}$

b) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

9.3. Solución del test verdadero/falso

1. **V**. El nuevo centro C' se obtiene como los nuevos vértices, multiplicando por z el complejo correspondiente al antiguo ($z_C = 3$). Esto es, $z_{C'} = 3 \cdot 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 6e^{\frac{\pi}{2}i} = 6i$, que corresponde al punto $(0, 6)$ (ver apdo. **3**).

2. **V**. El nuevo vértice se obtiene sumando z al complejo correspondiente al origen, es decir $z_{0'} = 0 + \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = 1 + i$, que corresponde al punto $(1, 1)$ (ver apdo. **3**).

3. **F**. Coinciden si su modulo es igual a 1 pues, en ese caso, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$.

4. **V**. Pues $e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{2} = -i$.

5. **V**. El inverso de un complejo w se representa por w^{-1} o también por $\dfrac{1}{w}$. Además se cumple que $\dfrac{1}{e^z} = \dfrac{e^0}{e^z} = e^{0-z} = e^{-z}$.

6. **V**. Se cumple para las raíces de la unidad de índice impar cualquiera. Hay siempre una (y sólo una) en el eje real, correspondiente a la raiz $z = +1$.

7. **F**. Forman un polígono regular de $2n$ vértices, con dos de ellos en el eje real, correspondientes a las raíces $z = \pm 1$.

8. **V**. Un polinomio de grado k posee k raíces en $\mathbb{C}$ (Teorema Fundamental del Álgebra). Por otra parte, si posee una raiz compleja posee también la conjugada, por lo que el número de raíces complejas no reales de un polinomio es siempre par (las raíces complejas no reales tienen parte imaginaria no nula).

   Como las raíces complejas no reales van siempre de dos en dos, habrá 0, 2, 4 ó 6. Entonces, si el grado del polinomio es impar (en este caso 7), el número de raíces reales será impar: como mínimo una y como máximo siete.

9.4. Solución de la cuestión

a) Para resolver este apartado, desarrollamos ambas expresiones:

Por la definición de e^z, sabemos que su módulo es e^x. Además, podemos verlo operando:

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)| = e^x\,|\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \mathrm{sen}^2\,y} = e^x$$

Por otro lado

$$e^{|z|} = e^{|x+yi|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Igualando los dos resultados, obtenemos:

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}} \Longleftrightarrow x = \sqrt{x^2+y^2}$$

que sólo tiene sentido si $x \geq 0$. En ese caso, elevando al cuadrado

$$x^2 = x^2 + y^2,\ x \geq 0 \Longleftrightarrow y = 0,\ x \geq 0$$

La igualdad se cumple sólo si la parte imaginaria de z es nula y la parte real es no negativa, es decir para $z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

b) Podemos llegar de una expresión a la otra $\forall z \in \mathbb{C}$, luego representan el mismo complejo.

$$\overline{e^z} \overset{(1)}{=} \overline{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \overset{(2)}{=} e^x \left(\overline{\cos y + i \operatorname{sen} y}\right) \overset{(3)}{=} e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) \overset{(4)}{=} e^x\, e^{-yi} \overset{(5)}{=} e^{x-yi} \overset{(6)}{=} e^{\overline{z}}$$

donde hemos dado los siguientes pasos:

(1) Por definición de exponencial compleja e^z.

(2) Pues e^x es un factor real y sale del conjugado.

(3) Por definición de conjugado.

(4) Ponemos el complejo conjugado en forma exponencial.

(5) Por las propiedades de la exponencial compleja.

(6) Por definición de conjugado.

Nota. Lo anterior se puede escribir más brevemente, usando la notación exponencial para e^z y las propiedades de la exponencial compleja.

$$\overline{e^z} = \overline{e^{x+yi}} = \overline{e^x\, e^{yi}} = e^x\, \overline{e^{yi}} = e^x\, e^{-yi} = e^{x-yi} = e^{\overline{z}}$$