1.– Obtén una aproximación polinómica de cuarto orden en un entorno del punto $x = 0$, para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-x^3}$ **b**) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $h(t) = \dfrac{1}{1+3t}$ **d**) $r(t) = \operatorname{sen}(-2t)$

e) $y(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ **f**) $z(x) = \dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$

2.– Sea f una función real, tres veces derivable en el intervalo $[-1, 1]$ y tal que

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Se pide demostrar que $f^{(3}(x) \geq 3$ para algún $x \in (-1, 1)$.
Sugerencia: obtener el desarrollo limitado de MacLaurin de orden 2 de f y evaluarlo en $x = \pm 1$.

3.– Estudia los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones en el conjunto indicado:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ en $[0, \pi]$; **b**) $y(x) = |6 - 4x|$ en $(-\infty, 3]$

c) $h(x) = 1/x$ en $[1, \infty)$; **d**) $s(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$ en $[-1, 1]$

4.– Prueba que se verifican las siguientes desigualdades:

a) $\operatorname{sen} x \leq x$, $\forall x \in [0, 2\pi]$; **b**) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$, $\forall x \in [0, 2\pi]$; **c**) $\ln x \leq x$, $\forall x > 0$

5.– Encuentra todos los puntos de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 80$ con $y \geq 0$, que estan más cerca y más lejos del punto $P(1, 2)$.
NOTA: La función $f : I \to \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, tiene los mismos extremos que f^2 en I.

6.– Un granjero quiere cercar un terreno adyacente a una pared de piedra. ¿Qué dimensiones permiten cerrar una zona rectangular de área dada A, empleando la mínima cantidad de alambre?

7.– Dada una esfera de radio R, calcula las dimensiones del cilindro recto de base circular de volumen más grande que puede inscribirse en ella.

8.– Una caja abierta está construida a partir de un rectángulo de cartón quitándole cuatro cuadrados iguales en cada vértice y doblando los bordes hacia arriba. Halla las dimensiones de la caja de volumen más grande que puede construirse de esta manera si el rectángulo tiene lados de longitud: **a)** 10 y 10; **b)** 6 y 10.

9.– Se desea fabricar un depósito de chapa metálica con forma de cilindro recto rematado por dos semiesferas. Suponiendo espesor nulo para la chapa, ¿qué dimensiones permitirán obtener una capacidad máxima para una superficie dada S de chapa?

10.– Dividimos una cuerda de longitud L en dos partes. Con una se forma una circunferencia y con la otra un cuadrado. Calcula las longitudes de las dos partes para que el área total encerrada por ambas figuras sea máxima.
