1.– Estudia la derivabilidad y calcula la derivada de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x| + x\,|x|$

b) $g(x) = x\sqrt{1+x^2}$

c) $r(t) = \operatorname{sen}\left(\cos^2 t\right) + \cos\left(\operatorname{sen}^2 t\right)$

d) $z(x) = \left(\operatorname{sen}^2 x + 1\right)^{e^{x^2}}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x-1)(x+1)^2, & |x| \le 1 \\ |x| - 1, & |x| > 1 \end{cases}$

f) $h(u) = \begin{cases} 1-u, & u \le 0 \\ e^{-u}, & u > 0 \end{cases}$

2.– Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Se pide:

a) Demostrar que, si $\forall x \in (a,b)\,,\ f'(x) \ge g'(x)$ y $\exists\, c \in (a,b)\,/\,f(c) = g(c)$, resulta que $\forall x \ge c\,,\ f(x) \ge g(x)$ y $\forall x \le c\,,\ f(x) \le g(x)$.

b) Mostrar que la hipótesis de $f(c) = g(c)$ es necesaria para la validez de la conclusión.

3.– Resuelve los problemas siguientes:

a) Encontrar los valores de x para los cuales la tangente a la curva $y = x - \dfrac{1}{x}$ es paralela a la recta $2x - y = 5$.

b) Sabiendo que $f(3) = -1$ y $f'(3) = 5$, encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 3$.

c) Encontrar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ $(b, c \in \mathbb{R})$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1,1)$.

d) Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x-1}{2}$ en el punto de intersección con el eje OX.

4.– Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función impar, derivable dos veces en todo $\mathbb{R}$. Se pide demostrar que f' es par y f'' es impar. ¿Qué conclusión podemos sacar de ello? Buscar ejemplos.

5.– Un barco navega paralelamente a una costa recta a una velocidad de 12 nudos y a una distancia de 4 millas. ¿Cuál es la velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que la distancia al faro es de 5 millas?

6.– Una partícula está obligada a moverse a lo largo de una parábola de ecuación $y = x^2$.

a) ¿En qué punto de la curva tienen el mismo ritmo de variación la abcisa y la ordenada?

b) Encuentra este valor si el movimento queda definido por las ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$ e $y = \operatorname{sen}^2 t$, siendo t el tiempo.

7.– Si una pila proporciona una fuerza electromotriz constante E, se pide demostrar, basándose en la ley de Ohm ($I = E/R$), que una pequeña variación en la intensidad de la corriente, debida a una pequeña variación de la resistencia, puede calcularse de manera aproximada por $\Delta I \approx -I\Delta R/R$.

8.– El lado de un cuadrado mide $10\,m$ con un error máximo de $\pm 0.1\,m$. Se pide usar diferenciales para estimar el error, absoluto y relativo, del área calculada.

9.– Se pide:

a) Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P'(x)$ tiene k raíces reales. Demostrar que $P(x)$ tiene a lo sumo $k+1$ raíces reales.

b) Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in N$, $n > 1$. Demostrar que el polinomio $P(x) = x^n + bx + c$ tiene, como máximo, 2 raíces reales si n es par y 3 si n es impar.

10.– Sea $f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$ continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ tal que $f'(x) \neq 1$, $\forall x \in (0,1)$. Demuestra que existe un único punto $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

11.– Se define la función f de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica de $f(x)$ en el intervalo [0,2].

b) Demuestra que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0,2] y determina todos los posibles valores medios dados por el teorema.

12.– Demuestra que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se satisface para 2 (y sólo 2) valores de x.

13.– Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas:

a) Si $f(x) = x + x^{-1}$, existe $a \in (-1,1)$ tal que $f'(a) = 0$.

b) Si $f(x) = x^4 + |x|$, existe $a \in (-1,1)$ tal que $f'(a) = 0$.

c) La ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres raíces reales.

d) La ecuación $3 \ln x = x$ tiene dos raíces reales.

14.– Calcula los siguientes límites aplicando, si es posible, la regla de L'hôpital:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \ln x \ln(x-1)$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{cotan} x - \ln x)$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$

e) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{e^{1/x}}$

f) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (x)^{\frac{1}{\ln x}}$

15.– Sean f y g funciones derivables en $\mathbb{R}$, tales que $f(0) = g(0) = 0$. Demuestra que es imposible la igualdad $x = f(x) \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
