1.– Indica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:

a) Toda sucesión convergente, es acotada.

b) Toda sucesión acotada es convergente.

c) Toda sucesión con una subsucesión convergente, es convergente.

d) Toda sucesión monótona creciente o decreciente, es convergente.

e) Toda sucesión convergente, es monótona.

2.– Justifica si son o no acotadas las siguientes sucesiones:

1) $\{2n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **2)** $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

3) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **4)** $\{\cos n\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$

5) $\left\{\dfrac{n^2-1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **6)** $\left\{\dfrac{(-1)^n}{\cos(n\pi/3)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

3.– Si $P(x)$ es un polinomio de grado $k>0$ con coeficientes reales positivos, calcula el límite de las sucesiones con término general a_n siguientes:

1) $P\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **2)** $\left(\dfrac{P(n+1)}{P(n)}\right)^n$

3) $P(n+1)-P(n)$ **4)** $\dfrac{\ln(P(n))}{\ln n}$

4.– Demuestra que la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ implica la convergencia de la sucesión $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ ¿Es cierto el recíproco? (Encuentra un contraejemplo en su caso.)

5.– Calcula los siguientes límites de sucesiones:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^n)$ **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-2^n)$ **4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}-\dfrac{n+1}{3n}\right)$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ **6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n}{2^n}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^{2n}$ **8)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-1}{3n}\right)^{-n^2}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **10)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)^{1/(n+1)}$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ **12)** $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[(n^2-n+1)^{1/n}\right]$

13) $\lim\limits_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ **14)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n!}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{(2n-1)/n^2}$ **16)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{1/n}$

6.– Dadas las siguientes sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas de manera recurrente, prueba que son convergentes y calcula su límite:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{a)}\ x_1 = 3, & x_{n+1} = \dfrac{x_n + 5}{2} \\
\textbf{b)}\ x_1 = \sqrt{2}, & x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} \\
\textbf{c)}\ x_1 = 1,\ x_2 = 4, & 2x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \\
\textbf{d)}\ x_1 = 1, & x_n = 1 + \dfrac{1}{x_{n-1}}
\end{array}$$

7.– Calcula los límites, cuando n tiende a infinito, de las expresiones siguientes:

1) $\dfrac{\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(a/2) + \cdots + \operatorname{sen}(a/n)}{n^2}$

2) $1 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right) + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right) + \cdots + n \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2+n}\right)$

3) $\dfrac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$

4) $\sqrt[n^2]{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdots 2^n}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

6) $\sqrt[n^2]{\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}}$

7) $\dfrac{e^{x_1/1} + e^{x_2/2} + \cdots + e^{x_n/n} - n}{\ln(n+1)}$, siendo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

8.– Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2+3}$

9.– Calcula la relación entre a y b para que tengan el mismo límite las sucesiones:

$$\alpha_n = \left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{3n+a} \qquad \beta_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{bn}$$

10.– Calcula, en función de los diferentes valores de $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^2 n - 2}{2n+1}\right)^{bn+3},\ n \in \mathbb{N}$$

11.– Un segmento de longitud unidad se divide en n partes iguales y sobre cada una de ellas, tomándola como diámetro, se construye una semicircunferencia. Calcula, cuando $n \to \infty$:

a) El límite de la longitud de la curva resultante.

b) El límite del área delimitada por las n semicircunferencias y el segmento.

12.– Sea un cuadrado de lado l. Dividimos cada lado en tres partes. Sobre la parte central de cada uno de ellos adosamos un nuevo cuadrado de lado $l/3$, resultando un polígono de 20 lados. Repetimos la operación, obteniendo ahora uno de 100 lados, y así sucesivamente...
Llamaremos L_0 y A_0 al perímetro y al área, respectivamente, del polígono inicial y L_n y A_n a los de los polígonos obtenidos tras repetir n veces el proceso. Se pìde obtener los límites de L_n y A_n cuando $n \to \infty$.
