1.– Estudia la derivabilidad y calcula la derivada de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

a) $f(t) = (1 + 1/t)^t$ **b)** $h(t) = t^{\sqrt{t}}$

c) $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{e^{x+1}-1}{|x^2-1|}$

e) $r(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ |t|, & t \leq 0 \end{cases}$ **f)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{36}(x-3)(x+3)^2, & |x| \leq 3 \\ |x| - 3, & |x| > 3 \end{cases}$

2.– Sean $g(t) = f(\operatorname{sen} t) + e^{f(t)+1}$ y $h(t) = \ln\big(2 + f(t)\big) + f\big(\ln(1+t)\big)$ donde $f(t)$ es una función real derivable tal que $f(0) = -1$ y $f'(0) = 1$. Prueba que $g'(0) = h'(0)$.

3.– Resuelve los siguientes problemas:

a) Encontrar los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ es paralela al eje de abcisas.

b) Obtener, si existen, las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1, 0)$.

c) ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

d) Hallar todos los valores de x para los cuales la tangente a la curva $y = (x+2)^2$ pasa por el origen.

4.– Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función impar, derivable dos veces en todo $\mathbb{R}$. Se pide demostrar que f' es par y f'' es impar. ¿Qué conclusión podemos sacar de ello? Busca ejemplos.

5.– Los extremos de un segmento AB de $5\,m$ de longitud, se desplazan por los ejes de coordenadas OX y OY respectivamente. La velocidad de desplazamiento del extremo A es de $2\,m/s$. ¿Cual será la velocidad de desplazamiento del extremo B en el instante en que el A se encuentre a una distancia de $3\,m$ del origen?

6.– Un recipiente tiene forma de cono recto de base circular. La altura mide $10\,m$ y el radio de la base $4\,m$. Introducimos agua en el recipiente con un caudal constante de $5\,m^3/min$. Calcula la velocidad a la que se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de $5\,m$ si el vértice del cono está:

a) Hacia abajo.

b) Hacia arriba.

7.– Demuestra, usando diferenciales, que un error relativo de un $1\,\%$ al determinar la longitud del radio da lugar a un error relativo aproximado de un $2\,\%$ al calcular el área del círculo y la superficie de la esfera.

8.– Sea la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$. Demuestra que la cuerda que une los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}(a + b)$.

9.– Se pide:

a) Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P'(x)$ tiene k raíces reales. Demuestra que $P(x)$ tiene a lo sumo $k + 1$ raíces reales.

b) Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $n \in N$. Demuestra que el polinomio $P(x) = x^n + bx + c$ tiene como máximo dos raíces reales si n es par y tres si n es impar.

10.– La función $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ toma el mismo valor para $x = 0$ y para $x = 4$. ¿Podemos aplicar a $f(x)$ el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$?

11.– Sean f y g dos funciones continuas y derivables en un intervalo acotado I, que verifican $f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x) \neq 0$. Demuestra que entre dos ceros consecutivos de $f(x)$, existe a lo sumo un cero de $g(x)$.

12.– Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, sea cual sea el valor de b.

13.– Decide si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:

a) Existe $a \in (-1, 1)$ tal que $f'(a) = 0$, donde $f(x) = x + 1/x$.

b) Existe $a \in (-1, 1)$ tal que $f'(a) = 0$, donde $f(x) = x^4 + |x|$.

c) La ecuación $e^x = 1 + x$ tiene una única raíz real.

14.– Calcula los siguientes límites aplicando, si es posible, la regla de l'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x}$

15.– Demuestra que la ecuación $4x^4 - 16x^3 - x^2 + 4x = 0$ tiene 4 raíces reales.
