

1.– Calcular los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos(x^2 - \ln(x+1))$

b) $g(x) = |x - \ln x|$

c) $f(u) = \sqrt{\frac{u^3}{u^2 - 1}}$

d) $f(u) = \ln\left(\frac{u-1}{u+2}\right)$

2.– Encontrar un $x \in \mathbb{R}$ tal que verifique las siguientes relaciones:

a) $\ln(1+x) = \ln(1-x)$

b) $\ln(1+x) = 1 + \ln(1-x)$

c) $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 1$

3.– Probar que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}^+$ se verifica:

a) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

b) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

4.– Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas y dando un contraejemplo en caso de falsedad:

a) Si la suma de dos funciones es discontinua, al menos una de ellas lo es.

b) El producto de una función continua por otra discontinua es discontinua.

c) Toda función continua en un intervalo está acotada en dicho intervalo.

d) Toda función monótona acotada en un intervalo cerrado, es continua en él.

e) Si $f(x)$ tiene en $x = a$ límites laterales finitos, decimos que tiene límite en $x = a$.

5.– Demostrar que la función de Dirichlet, definida por:

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

es discontinua en todo $\mathbb{R}$.

6.— Calcular los siguientes límites de funciones de variable real:

- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ x }{x}$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{x}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x}$ | 8) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln(t^2 - 2t + 1))^{1/t}$ |
| 9) $\lim_{t \rightarrow \pi/2} (\sin t - 1) \tan t$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} x \arcsen(1/x) \quad \left(\arcsen(1/x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right)$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) e^{-x}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)^{1/x}$ | 14) $\lim_{t \rightarrow \pi/4} \frac{\sen(t - \pi/4)}{4t - \pi}$ |
| 15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ | 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$ |
| 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sen(x^2 - 1)}{x + 1}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sen x}$ |
| 19) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sen t}{ t }$ | 20) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{ x - 1 }$ |
| 21) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x }{e^x - 1}$ | 22) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1}{2^{t^2}}$ |
-

7.— Calcular el valor de las constantes a y b , para que las siguientes funciones reales de variable real, sean continuas en todo $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } r(t) = \begin{cases} \sen t, & t \leq 1 \\ at + 2, & t > 1 \end{cases}; \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & x \geq 0 \\ \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}; \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{1/x} + a, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ b^{1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

8.— Estudiar la continuidad de las siguientes funciones e indicar los tipos de discontinuidades que se presenten :

a) $h(t) = \frac{\sen(t+1)}{ t^2 - 1 }$	b) $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$
c) $f(x) = \frac{ x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	d) $g(y) = \frac{e^{2y} - 1}{\ln(y^2 + 1)}$
e) $r(t) = \begin{cases} e^{1/(t-1)}, & t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$	f) $s(t) = \begin{cases} e^{1/(t-1)}, & t \neq 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$

9.— Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($a \neq b$) tal que $f(x) \in Q \quad \forall x \in [a, b]$. Demostrar que $f(x)$ es constante.

10.— Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y sea $C = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ el conjunto de sus ceros. Demostrar que:

- a) C no puede ser un intervalo abierto.
 - b) C es un conjunto cerrado.
-

11.— Resolver los siguientes problemas:

- a) Dar un ejemplo de una función que toma valores positivos y negativos en un intervalo $[a, b]$, y no se anula en ningún punto.
 - b) Dar un ejemplo de una función continua en un conjunto abierto A , que no alcanza ningún extremo en A .
 - c) Probar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y se cumple $f(-1) = -3$ y $f(2) = 18$, entonces $\exists t \in (-1, 2)$ tal que $f(t) = 7$.
-

12.— Dadas las siguientes ecuaciones, indicar un intervalo (orientándose gráficamente) en el cual pueda asegurarse la existencia de alguna solución:

a) $t^2 + \ln t = 0$

b) $e^{t-1} = \frac{1}{t+1}$

c) $e^t = 2 - t^2$

d) $t \ln t = 1$
