1.– Demuestra las siguientes propiedades, válidas para subconjuntos A, B de un espacio métrico (E, d). Además, en los apartados **c)** y **f)**, pon ejemplos en los que no se verifique la relación de igualdad:

a) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathring{\mathrm{A}} \subset \mathring{\mathrm{B}}$

b) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{B}}$

c) $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^{\mathrm{o}}$

d) $\mathring{\mathrm{A}} \cup \mathring{\mathrm{B}} \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathrm{o}}$

e) $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

f) $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$

2.– Prueba que la aplicación $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to [0, \infty)$, definida por $d(x, y) = \left|\log_{10} \frac{y}{x}\right|$, es una distancia en $\mathbb{R}^+$ y determina la bola cerrada de centro 10 y radio 1.

3.– Sea (E, d) un espacio métrico y $\mathrm{A} \subset \mathrm{E},\ \mathrm{A} \neq \phi$. Para un $x \in \mathrm{E}$ se define

$$d(x, \mathrm{A}) = \text{ínf}\{d(x, y) \ / \ y \in \mathrm{A}\}$$

Demuestra que $x \in \overline{\mathrm{A}} \Longleftrightarrow d(x, \mathrm{A}) = 0$.

4.– Decide si las siguientes afirmaciones, referidas a subconjuntos de $\mathbb{R}$ dotados de la métrica natural, son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) $\mathbb{Q}$ es cerrado.

b) $[0, 6]$ es entorno de 6.

c) La unión de conjuntos acotados es siempre acotada.

d) Entre dos irracionales existe un racional y entre dos racionales un irracional.

e) El conjunto $\left\{\dfrac{n}{2^n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$ es acotado.

f) No hay conjuntos compactos infinitos contenidos en $\mathbb{Q}$.

5.– Decide si las siguientes afirmaciones referidas a subconjuntos de un espacio métrico (E, d) son verdaderas o falsas, demostrando las verdaderas y dando un contraejemplo de las falsas. **Nota**: en los apartados **a)** y **e)** se supondrá que el espacio E es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

a) Si B es compacto y $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, entonces A es compacto.

b) Si A y B son no cerrados, entonces $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ no es cerrado.

c) Si $\mathring{\mathrm{A}} = \phi$, entonces $Fr(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}$.

d) Un conjunto no puede estar contenido estrictamente en su frontera.

e) Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ es compacto y todos sus puntos son aislados, entonces A es finito.

f) Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ es finito entonces su conjunto derivado es el vacío.

6.– Sean los siguientes subconjuntos de los espacios métricos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ dotados de las métricas euclídeas. Se pide determinar, para cada uno, sus conjuntos interior, exterior, adherencia, frontera, derivado y conjunto de puntos aislados. Decide si son abiertos, cerrados, acotados o compactos:

a) $\mathbb{N}$

b) $[0,1) \cup \{2\} \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (3,4))$

c) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$

e) $[0,1] \setminus \left\{x \;/\; \dfrac{1}{2n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

f) $(0,1] \times [0,1)$

g) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

h) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x| < |y|\}$

j) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |x| + |y| < 1\}$

k) $\left\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \;/\; x \in (0,3),\ y = \dfrac{3}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

l) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z = 1,\ x^2 + y^2 < 1\}$

m) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y + z < 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
