

1.– Demuestra por inducción las siguientes propiedades:

- a) $2^n < n! \quad \forall n \geq 4.$
 - b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$
 - c) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} < 2.$
-

2.– Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n^2 + 5)$ es divisible entre 6.

3.– Sea K un cuerpo ordenado. Demuestra que en K son válidas las siguientes propiedades:

- a) $1 > 0$ (el elemento unidad del producto es mayor que el neutro de la suma).
 - b) $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1} > 0.$
 - c) $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in K.$
 - d) $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in K.$
 - e) $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \quad \forall x, a, r \in K \text{ con } r \geq 0.$
-

4.– Sea la sucesión $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$. Demuestra independientemente que:

- a) Es convergente y su límite es 0.
 - b) Es de Cauchy.
-

5.– Sean $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ y $b \notin \mathbb{Q}$. Prueba que $a \cdot b$ y $a + b$ son irracionales. Halla un ejemplo de dos números irracionales x , y tales que su suma y su producto sean racionales.

6.– Demuestra que la raíz cuadrada positiva de un número natural sólo puede ser natural o irracional.

7.– Escribe en función de intervalos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R} : x < x^2 - 12 < 4x\}$
 - c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 6 < 0\}$
 - d) $\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x+3)(x-4)}{x^2+x} < 0 \right\}$
-

8.– Escribe en función de intervalos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- a) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq 1\}$
 - c) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 5\}$
 - d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < |x - 1|\}$
 - e) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - 2| \leq 3\}$
 - f) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| |x - 2| > 4\}$
 - g) $\{x \in \mathbb{R} : |x| + |x + 1| < 2\}$
 - h) $\{x \in \mathbb{R} : ||x - 1| - |x + 1|| \leq 1\}$
-

9.– Calcula una cota superior, una cota inferior, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si existen) de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- a) $(1, 3)$
 - b) $\mathbb{N}$
 - c) $[1, 2] \cup \{-1, 0\}$
 - d) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - e) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
 - f) $\{2, 2.2, 2.22, 2.222, \dots\}$
-