

1.– Simplifica las siguientes expresiones dando el resultado en forma de potencia de exponente fraccionario:

$$\text{a) } \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{(2^5)^2}}{\sqrt[3]{(5^2)^5}}} \quad \text{b) } (a^3)^5 \frac{a^{-4}}{(a^{-4})^{-2}}$$

Solución: a) $\frac{2^{5/6}}{5^{5/6}}$; b) a^3

2.– Simplifica la siguiente expresión dando el resultado como un único logaritmo:

$$\ln \sqrt{x} + \ln 3 \log_3(x^2)$$

Solución: $\ln x^{5/2}$

3.– Simplifica las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \sin(2 \arcsin x) \quad \text{b) } \cos(\arctan x)$$

Solución: a) $\pm 2x\sqrt{1-x^2}$; b) $\pm \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4.– Simplifica al máximo la expresión: $\sin(x-y) \cos y + \cos(x-y) \sin y$.

Solución: $\sin x$

5.– Halla los números reales que cumplen la condición: $|x-1| |\pi-x| = 0$.

Solución: $x_1 = 1, x_2 = \pi$

6.– Resuelve la inecuación: $\left| 3 - \frac{1}{x} \right| < 1$.

Solución: $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$

7.– Halla todas las soluciones reales y complejas de la ecuación: $x^2 - 2\sqrt{5}x + 6 = 0$.

Solución: $x_1 = \sqrt{5} + i, x_2 = \sqrt{5} - i$

8.– Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad \text{b) } 5 \tan x + 12 \sin^2 x = 11$$

Solución: a) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.– Determina el valor del producto p de todas las soluciones reales de la ecuación $x^{\log_{10} x} = 10$.

Solución: $p = 1$

10.− Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2+x=y^2 \\ 2+y=x^2 \end{cases}$

Solución: $x_1 = y_1 = 2, x_2 = y_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, y_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

11.− Calcula el valor de $\ln(xy)$ sabiendo que $\ln(xy^3) = 1$ y que $\ln(x^2y) = 1$.

Solución: $\ln xy = \frac{3}{5}$

12.− Determina las soluciones reales de la ecuación $|1 - x^2| = 1 - x$.

Solución: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$

13.− Determina las soluciones de la ecuación $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$.

Solución: $x = \frac{3}{2}$

14.− Descompón en fracciones simples:

a) $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ b) $\frac{x+3}{x^2+4x}$

Solución: a) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right);$ b) $\frac{1}{4} \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x+4} \right)$

15.− La gráfica de la función $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ corta al eje horizontal en cinco puntos distintos, uno de los cuales es el $(0,0)$. Indica qué coeficiente no puede ser cero.

Solución: d

16.− Calcula el radio de una circunferencia concéntrica con $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ que pasa por el punto $(1,1)$.

Solución: $R = \sqrt{17}$

17.− Calcula la recta simétrica de $2x + 3y = 1$ respecto de $y = -x$.

Solución: $2y + 3x = -1$

18.− Sea f una función tal que $\forall x > 0$, se cumple $f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$. Calcula $f(2)$.

Solución: $f(2) = 2000$

19.− Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ b) $f(x) = (a + bx)^n$
c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $f(x) = \cotan x - 2 \operatorname{cosec} x$
e) $f(x) = \cos(\tan x)$ f) $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$
g) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ h) $f(x) = (\sen x)^{\cos x}$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} & \text{b) } f'(x) = nb(a+bx)^{n-1} \\ \text{c) } f'(x) = (x^2+1)^{-3/2} & \text{d) } f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} \\ \text{e) } f'(x) = -\frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x} & \text{f) } f'(x) = 1 + 2x \arctan x \\ \text{g) } f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1 + x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{h) } f'(x) = (\sin x)^{\cos x - 1} [\cos^2 x - \sin^2 x \ln(\sin x)] \end{array}$$

20.— En un triángulo ABC , sea M el punto medio de BC . Si $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ y $AM = 5 \text{ cm}$, calcula el área S del triángulo.

Solución: $S = 12 \text{ cm}^2$

21.— El perímetro de un triángulo rectángulo es 40 cm y la suma de los cuadrados de sus catetos vale 578 cm^2 . Calcula la longitud l del lado más corto.

Solución: $l = 8$

22.— Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en un punto P , formando un triedro trirectángulo. Calcula a qué distancia del techo está una mosca situada en el aire, si se encuentra a 1 m de una pared, a 8 m de la otra y a 9 m del punto P .

Solución: $d = 4 \text{ m}$

23.— $ABCD$ es un rectángulo. E es un punto cualquiera del lado CD . Sean x, y, z las áreas de los triángulos AED , BCE y ABE , respectivamente. Si $y^2 = xz$, calcula el valor $\frac{DE}{EC}$.

Solución: $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

24.— Calcula el valor de $S = \log 2! - \log 3! + \log 4! - \dots - \log 9! + \log 10!$

Solución: $S = 5 \log 2 + \log 5!$

25.— Sean $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{10}$, $T = 1 + a + a^2 + \dots + a^{21}$. Calcula el valor de T/S .

Solución: $T/S = (1 + a^{11})$

26.— Simplifica la siguiente expresión: $\tanh(\operatorname{argsh} x)$.

Solución: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

27.— Demuestra que se verifica la identidad siguiente: $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$.

Solución: Basta sustituir $\sinh$ y $\cosh$ por sus expresiones en forma exponencial.
